# SSSUP 2013 — LEZIONE 16

Titolo nota 18/03/2013

$\boxed{\text{Succ. per ricorrenza non autonome}}$ $a_{n+1} = f(a_n, n)$

la legge di passaggio cambia di volta in volta

**Esempio 1** $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n}$ $a_1 = \frac{1}{2}$

Calcolando un po' di termini: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{32}$

$\boxed{n=1}$ $\boxed{n=2}$

Idea: $a_n \to 0$.

$\boxed{\text{Piano}}$ (i) $0 \le a_n \le 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (induzione)

(ii) $a_{n+1} \le a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (facile)

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (solito)

(iv) $\ell = 0$

**Dim (iv)** Passo al limite nella ricorrenza

$$a_{n+1} = \boxed{\frac{a_n^2}{n}} \qquad a_n^2 \to \ell^2 \in \mathbb{R}, \quad n \to +\infty$$

$$\ell = 0$$

[evitare $\frac{a_n^2}{n} \to \frac{\ell^2}{n} \to 0$]

$\boxed{\text{Piano B}}$ (i) $0 \le a_n \le 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Grazie ad (i) abbiamo che $\boxed{0} \le a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \le \boxed{\frac{1}{n}}$

$$0 \qquad\qquad 0$$

Per i Carabinieri si ha quindi che $a_{n+1} \to 0$, il che è equivalente a dire che $a_n \to 0$

Achtung! Non pensare nemmeno per un attimo che $a_n \to 0$ in quanto il denominatore nella ricorrenza tende a $+\infty$.

Esempio 2 $\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{n} \qquad a_1 = 2$

Un po' di termini: $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ a_4 = \dfrac{64}{3}, \ldots$

Idea: $a_n \to +\infty$ [ Esercizio: provare a quali fallimenti si va incontro con un piano basato sulla monotonia]

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $a_n \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \to +\infty$ (banale dall' (i))

Dim (i) Provo per induzione. Passo base: banale

Passo induttivo: ipotesi: $a_n \geq 2^n$ Tesi $a_{n+1} \geq 2^{n+1}$

Dim. passo induttivo: $a_{n+1} \underset{\text{ric.}}{=} \dfrac{a_n^2}{n} \underset{\text{uso ipotesi}}{\geq} \dfrac{2^{2n}}{n} \overset{?}{\geq} 2^{n+1}$

Controllo la speranza: $2^{2n} \geq n \cdot 2^{n+1}$, cioè $2^{n-1} \geq n$.

Questa si dimostra facilmente per induzione o usando Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Con $x=1$ è proprio quello che serve: $2^n \geq n+1$.

— o — o —

Morale: è molto più facile dimostrare che $a_n \geq 2^n$ che dimostrare che $a_n \geq n$ (quest' ultimo per induzione non riesce).

Oss. In alternativa avrei potuto provare un pto (i) del tipo $a_n \geq n^2$ (provare che succede per induzione).

<u>Achtung!</u> Evitare ragionamenti di questo tipo

$a_{n+1} \le a_n \iff \frac{a_n^2}{n} \le a_n \iff a_n \le n$ e questo per $n$ grande è vero.

(No: quando $n$ cresce possono crescere entrambi).

<u>Esempio 3</u> $\quad a_1 = 2013 \qquad a_{n+1} = 7 + \frac{n^{100}}{2^n} a_n$

Idea: per un po' all'inizio cresce, poi la smette e tende a 7.

$\boxed{\text{PIANO}}$ Da un certo $n_0$ in poi si ha che $\frac{n^{100}}{2^n} \le \frac{1}{2}$

Pongo $M := \max\{a_n : 1 \le n \le n_0\}$ e dimostro per induzione che $a_n \le M + 14 \quad \forall n \ge n_0$.

A quel p.to sarà facile concludere con i carabinieri (farlo!)

Dim. per induzione che $a_n \le M + 14$ per ogni $n \ge n_0$.

Passo base: banale $\boxed{n = n_0}$

Passo induttivo: Ipotesi: $a_n \le M+14 \qquad$ Tesi: $a_{n+1} \le M+14$

<u>Dim.</u> $\quad a_{n+1} = 7 + \underbrace{\boxed{\frac{n^{100}}{2^n}}}_{\le \frac{1}{2}} \underbrace{\boxed{a_n}}_{\le M+14} \le 7 + \frac{1}{2}(M+14) = \frac{M}{2} + 14 \le M + 14$

<u>Osservazione</u> È una induzione che parte da un p.to misterioso $n_0$ con un valore misterioso $M$ (potevo usare $M = a_{n_0}$)

—o—o—

<u>Esempio 4</u> $\quad a_1 = 2013 \qquad a_{n+1} = 7\sqrt{a_n} + \frac{1}{n}$

Idea: $a_n \to 49$

Osservazione iniziale: gli unici limiti reali possibili sono 0 e 49

$$a_{n+1} = 7\sqrt{a_n} + \frac{1}{n}$$

$$\ell = 7\sqrt{\ell} + 0 \qquad \ell = 0,\ 49$$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $a_n \geq 49 \quad \forall n \geq 1$ (banale)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (banale)

(iv) $\ell = 49$ (banale)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Per induzione. Passo base $a_2 \leq a_1$ banale

Passo induttivo   Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$   Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Dim.: $$\underset{\text{ric.}}{a_{n+2} =} 7\sqrt{a_{n+1}} + \frac{1}{n+1} \underset{\text{uso Hp.}}{\leq} 7\sqrt{a_n} + \frac{1}{n+1} \underset{\text{Den.+piccolo}}{\leq} 7\sqrt{a_n} + \frac{1}{n} = a_{n+1}$$

—o—o—

Esempio 5   $a_1 = 0 \qquad a_{n+1} = 7\sqrt{a_n} + \frac{1}{n}$

Idea: $a_n$ continua a tendere a 49. MA: la crescenza NON funziona per induzione !!!!

$\boxed{\text{PIANO CON ALTERNATIVA}}$ Ci sono 2 possibilità:

1. $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ma allora è crescente, quindi...)

2. $\exists n_0$ t.c. $a_{n_0+1} < a_{n_0}$. Allora da $n_0$ in poi sarà decrescente. Questo si fa per induzione.

In ogni caso è monotona.

Domanda: siamo nel caso 1 o nel caso 2 ???