SSSUP 2013 — LEZIONE 15

Titolo nota 18/03/2013

<u>Piano con la distanza</u> Sia $f(x)$ una funzione e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f(x_0) = x_0$

(ii) $\exists\, \delta > 0$ tale che, nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ si ha che $f(x)$ è lip. con una certa costante $L < 1$ stretto

Allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che la successione per ricorrenza

$$a_0 = \alpha \qquad a_{n+1} = f(a_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

tende ad x_0.

$\boxed{\text{Dim.:}}$ (i) $x_0 - \delta \leq a_n \leq x_0 + \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) posto $d_n := |a_n - x_0|$ si ha che $d_{n+1} \leq L\, d_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $d_n \leq L^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

(iv) $d_n \to 0$, dunque $a_n \to x_0$.

<u>Dim (ii)</u>:

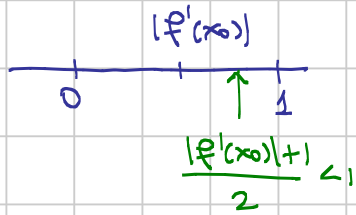
$$d_{n+1} \underset{\text{def.}}{=} |a_{n+1} - x_0| \underset{\text{ric.} + x_0 = f(x_0)}{=} |f(a_n) - f(x_0)| \underset{\text{Lip}}{\leq} L\,|a_n - x_0| \underset{\text{def.}}{=} L\, d_n$$

— o — o —

<u>Corollario</u> Se f è derivabile con f' continua e $f(x_0) = x_0$ e $|f'(x_0)| < 1$, allora $\exists\, \delta > 0$ per cui vale l'ipotesi del teorema.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se $|f'(x_0)| < 1$, allora in un intorno di x_0 si ha che

$$|f'(x)| \leq \frac{|f'(x_0)| + 1}{2} = L < 1$$



quindi in quell'intorno $f(x)$ è lip. con costante $L < 1$.

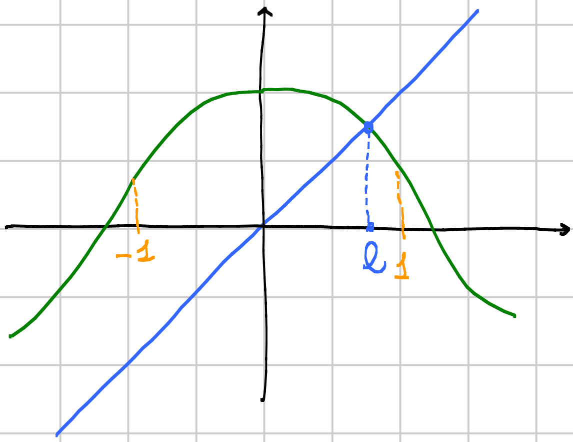
— o — o —

Detto altrimenti: partendo vicino a x_0 e continuando ad iterare $f(x)$ arrivo in x_0.

<u>Esempio 1</u> $a_0 = 2013$ $a_{n+1} = \cos(a_n)$

[cioè: scrivere 2013 sulla calcolatrice e continuare a premere cos]

Esercizio: $\cos x$ e x si incontrano in un unico punto ℓ



[Basta osservare che $g(x) = x - \cos x$ è strettamente crescente (perché?), quindi iniettiva, ed è anche surgettiva (perché?)].

<u>Prima idea:</u> $f(x) = \cos x$ è Lip. con costante $L = 1$, e questo non va bene.

<u>Seconda idea:</u> $a_n \in [-1, 1]$ per ogni $n \geq 1$ (banale induzione), quindi quello che conta è la costante di Lip. di $f(x) = \cos x$ in $[-1, 1]$.

Su $[-1,1]$ la costante di Lip. è

$$\sup\{|f'(x)| : x \in [-1,1]\} = \sup\{|\sin x| : x \in [-1,1]\} = \sin 1 < 1$$

Quindi posso fare il piano con la distanza con $L = \sin 1$

<u>Piano:</u> (i) $-1 \leq a_n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) posto $d_n := |a_n - \ell|$ si ha che $d_{n+1} \leq \sin 1 \cdot d_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq (\sin 1)^n d_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \to 0$, quindi $a_n \to \ell$.

Volendo stimare la velocità di convergenza, basta usare il p.to (iii), o meglio ancora

(iii)' $d_n \leq (\sin 1)^{n-1} d_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$0 \leq d_1 \leq 2$ $d_n = |a_1 - \ell| \leq |a_1| + |\ell| \leq 2$

— o — o —

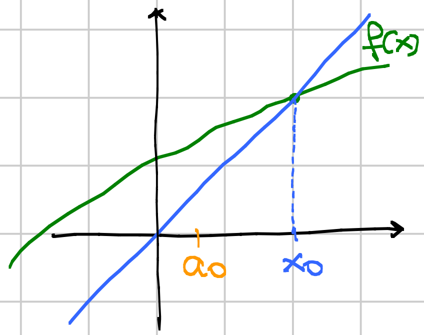
Piano con la monotonia Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = x_0$.

Supponiamo che

(i) $a_0 < x_0$

(ii) $f(x) > x$ per ogni $x \in [a_0, x_0)$

(iii) $f(x)$ sia debolmente crescente in $[a_0, x_0]$.



Allora la successione per ricorrenza

$a_{n+1} = f(a_n)$

tende ad x_0

$\boxed{\text{Dim.}}$ (i) $a_0 \leq a_n \leq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione)

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ricorrenza + ipotesi (ii))

(iii) $a_n \to \ell \in \boxed{\mathbb{R}}$ (teo. succ. monotone)

(iv) $\ell = x_0$ (passare ricorrenza al limite)

— o — o —

Variante: Supponiamo che $f(x) > x$ per ogni $x \geq a_0$ e f continua.
Allora la successione $a_{n+1} = f(a_n)$ tende a $+\infty$

$\boxed{\text{Dim.}}$ (i) $a_n \geq a_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione)

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ricorrenza + Ipotesi $f(x) > x$)

(iii) $a_n \to \ell \in \boxed{\mathbb{R} \cup \{+\infty\}}$ (teo. succ. monotone)

(iv) $\ell = +\infty$

Dim. (iv): supponiamo per assurdo che sia $\ell \in \mathbb{R}$.
Allora posso passare al limite nella ricorrenza:

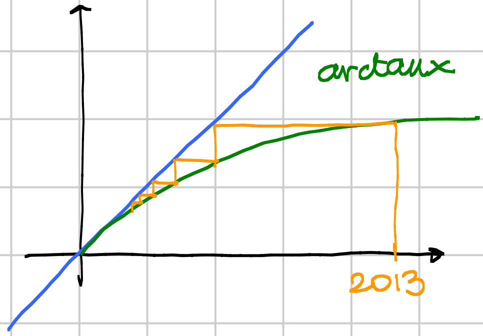
$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & f(a_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

Questa equazione non ha soluzioni reali $\geq a_0$ (le uniche compatibili con il punto (i)) per via dell'ipotesi che $f(x) > x$ per ogni $x \geq a_0$.
L'unica possibilità rimasta è $\ell = +\infty$.

— o — o —

Esempio 2 $\quad a_0 = 2013$

$a_{n+1} = \arctan a_n$



Si vede facilmente con la monotonia che $a_n \to 0$. Per dimostrarlo serve sapere che

- $\arctan x = x$ se e solo se $x = 0$,
- $\arctan x \leq x$ per ogni $x \geq 0$,
- $\arctan x$ è crescente in $[0, +\infty)$.

Domanda: stimare la velocità di convergenza.

Purtroppo la distanza non funziona perché $f(x) = \arctan x$ è lip. con costante 1 in ogni intervallo che contiene $x=0$ $(f'(0) = 1)$.
[N.B.: questo dice che non posso dimostrare la convergenza con la distanza, serve proprio la monotonia].

Ci aspettiamo una convergenza lenta, del tipo $a_n \sim \dfrac{a}{n^b}$

[Brutal mode: ricerca euristica di a e b. Impongo $a_{n+1} = \arctan a_n$

$$\frac{a}{(n+1)^b} = \arctan \frac{a}{n^b} \overset{\text{Taylor}}{=} \frac{a}{n^b} - \frac{1}{3}\frac{a^3}{n^{3b}}$$

$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3$

$$\frac{a}{(n+1)^b} \sim \frac{a}{n^b} - \frac{1}{3}\frac{a^3}{n^{3b}}$$ Moltiplico per n^b

$$\frac{a n^b}{(n+1)^b} \sim a - \frac{1}{3}\frac{a^3}{n^{2b}}$$

$$a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-b} \sim a - \frac{1}{3}\frac{a^3}{n^{2b}}$$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots$

$$a\left(1-\frac{b}{n}\right) = \cancel{a} - \frac{ab}{n} \sim \cancel{a} - \frac{1}{3}\frac{a^3}{n^{2b}}$$

$2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

$ab = \frac{1}{3}a^3 \Rightarrow b = \frac{1}{3}a^2$

$a^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Dal conto euristico pare ragionevole che sia

$$\boxed{a_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Per dimostrarlo rigorosamente devo verificare che

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} \cdot a_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

<u>Dim.</u> Basta dimostrare che $\lim_{n \to +\infty} n \cdot a_n^2 = \frac{3}{2}$, cioè che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\boxed{n} \to +\infty}{\boxed{\frac{1}{a_n^2}} \to +\infty} = \frac{3}{2}$$

Verificate le ipotesi, mi riduco all' "Hôpital per successioni" con n e $\frac{1}{a_n^2}$. Quindi il limite dato è uguale al

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\cancel{n}+1) - \cancel{n}}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{(\arctan a_n)^2} - \frac{1}{a_n^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{(\arctan x)^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \arctan^2 x}{x^2 - \arctan^2 x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{x^2 - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \dots\right)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{2}{3} x^4 + o(x^4)} = \frac{3}{2}.$$

— o — o —

<u>Esercizio</u> Capire come va a 0 la successione

$$a_{n+1} = a_n - 2a_n^4 \qquad a_0 = \frac{1}{2}.$$