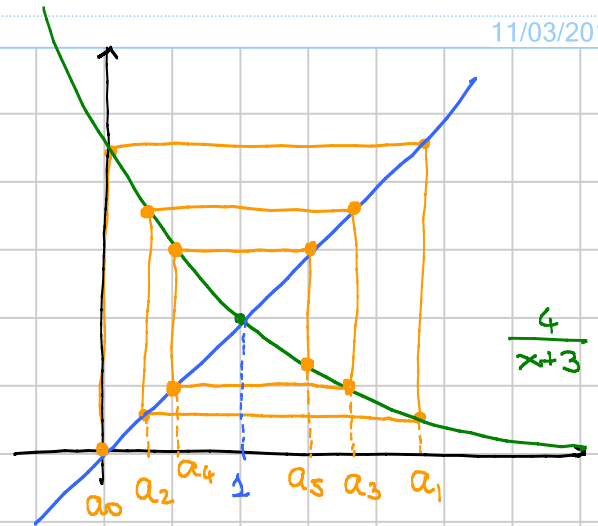


Caso spiraleggiante

$$a_{n+1} = \frac{4}{a_n + 3} \quad a_0 = 0$$

Idea: $a_n \rightarrow 1$ "spiraleggiando"



Due tipi di piano

- * PIANO CON LA DISTANZA
- * PIANO CON LE 2 SOTTOSECUSSIONI

Per il piano con la distanza, serve una zona in cui $f(x)$ è Lip con costante < 1 .

$$|f'(x)| = \frac{4}{(x+3)^2} \leq \frac{4}{9} \quad \forall x \geq 0$$

Piano Pongo $d_n := |a_n - 1|$ ↑ presunto limite

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (banale induzione)

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{4}{9} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (banale induzione)

(iv) $d_n \rightarrow 0$ (Cesàro)

Dim. di (ii)

$$d_{n+1} = \underbrace{|a_{n+1} - 1|}_{\text{def.}} = \underbrace{|f(a_n) - f(1)|}_{\text{ric. } + f(1)=1} \leq \underbrace{\frac{4}{9}}_{\text{Lip}} \underbrace{|a_n - 1|}_{\text{def.}} = \frac{4}{9} d_n$$

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{4}{3a_n+1}$ $a_0 = 0$

Il disegno è molto simile a prima.

$$|f'(x)| = \frac{12}{(3x+1)^2} \quad \sup \{ |f'(x)| : x \geq 0 \} = 12 \text{ e non va bene}$$

Oss. $|f'(1)| = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} < 1$. Quindi esiste un intorno di 1 in cui $|f'(x)| \leq \frac{7}{8}$
 ↑ più di $\frac{3}{4}$, meno di 1

Idea: ① cerco $\delta > 0$ tale che $|f'(x)| \leq \frac{7}{8}$ per ogni $x \in [1-\delta, 1+\delta]$

② itero a mano la successione fino a quando non trovo un n_0 tale che $|a_{n_0} - 1| \leq \delta$

③ Fatto con il piano con la distanza a partire da n_0 .

Alternativa: piano con le 2 sottosuccessioni

Idea: a_{2m} è monotona crescente, a_{2m+1} è monotona decrescente

- PIANO**
- (i) $0 \leq a_n \leq 4$ ($= a_n$) $\forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $a_{2m} \leq a_{2m+2} \leq 1 \leq a_{2m+3} \leq a_{2m+1}$ $\forall m \in \mathbb{N}$
 - (iii) $a_{2m} \rightarrow l \in \mathbb{R}$, $a_{2m+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$ (banale)
 - (iv) $l = m = 1$

Dim (i) Inclusione + applico $f(x)$

Passo base: banale

Passo induttivo Ipotesi: $0 \leq a_n \leq 4$ Tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq 4$

Prendo l'ipotesi e applico $f(x)$: GIRO I VERSI perché $f(x)$ è decrescente

$$0 \leq a_n \leq 4 \Rightarrow \underset{4}{f(0)} \geq f(a_n) \geq f(4) \underset{4}{\geq} a_{n+1} \geq \frac{4}{13} \geq 0 \text{ che è la tesi}$$

Dim. (ii) Induzione + applico $f(x)$

Passo base: $a_0 \leq a_2 \leq 1 \leq a_3 \leq a_1$

Calcolo: $a_0 = 0$, $a_1 = 4$, $a_2 = f(4) = \frac{4}{13}$. Osservo che

$$a_0 \leq a_2 \leq 1 \rightsquigarrow \text{applico } f(x) \rightsquigarrow \begin{matrix} f(1) \leq f(a_0) \leq f(a_1) \\ 1 \leq a_3 \leq a_1 \end{matrix}$$

Passo induttivo Ipotesi: $a_{2m} \leq a_{2m+2} \leq 1 \leq a_{2m+3} \leq a_{2m+1}$

$$\begin{aligned} \text{Applico } f(x): \quad & f(a_{2m}) \geq f(a_{2m+2}) \geq f(1) \geq f(a_{2m+3}) \geq f(a_{2m+1}) \\ & a_{2m+1} \geq a_{2m+3} \geq \boxed{1 \geq a_{2m+4} \geq a_{2m+2}} \\ & \text{perzo della tesi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Applico } f(x) \text{ al perzo della tesi:} \quad & f(1) \leq f(a_{2m+4}) \leq f(a_{2m+2}) \\ & \boxed{1 \leq a_{2m+5} \leq a_{2m+3}} \\ & \text{perzo restante della tesi} \end{aligned}$$

Dim. (iv)

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= \frac{4}{3a_{2m}+1} \\ \downarrow \\ m &= \frac{4}{3l+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2m+2} &= \frac{4}{3a_{2m+1}+1} \\ \downarrow \\ l &= \frac{4}{3m+1} \end{aligned}$$

Otengo un sistema in m ed l :
$$\begin{cases} 3ml + m = 4 \\ 3ml + l = 4 \end{cases}$$

Sottraendo ottengo $m = l$ e poi $3l^2 + l = 4 \rightsquigarrow l = 1$

$$l = -\frac{4}{3} \rightarrow \text{NO per (i)}$$

Lemma (delle 2 sottosuccessioni) Sia a_n una successione.

Se $a_{2m} \rightarrow l$ e $a_{2m+1} \rightarrow l$ (stesso $l \in \mathbb{R}$), allora $a_n \rightarrow l$

Alternativa: osservo che $a_{2m+2} = f(f(a_{2m}))$
 $a_{2m+3} = f(f(a_{2m+1}))$

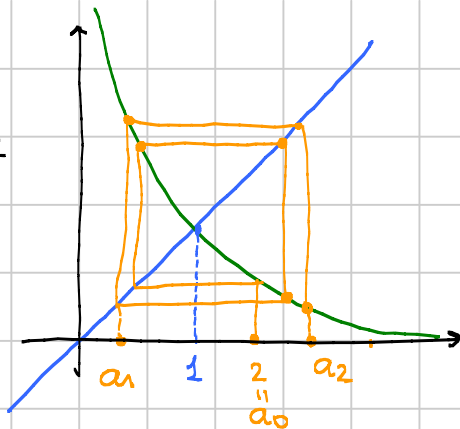
e $f(f(x))$ è crescente, quindi si ricasca nel caso monotono.

Esempio 3

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2a_n^2}$$

$$a_0 = 2$$

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^3} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}$$



Vediamo se ci sono speranze di lip.:

$$|f'(x)| = \left| -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^3} \right| = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2}$$

In $x=1$ si ha $|f'(1)| = \frac{3}{2}$, quindi NON esiste un intorno di $x=1$ in cui $f(x)$ è lip. con costante < 1 !!

L'idea è che ci sia spiraleggiamento USCENTE:

$$a_0 = 2 \quad a_1 = \frac{3}{8} \quad a_2 = \frac{\frac{3}{8} + 1}{2 \cdot \frac{9}{64}} = \frac{11}{8} \cdot \frac{32}{9} = \frac{44}{9} > 2$$

È successo che $1 \leq a_0 \leq a_2$

Applico $f(x)$: $f(1) \geq f(a_0) \geq f(a_2)$, cioè $1 \geq a_1 \geq a_3$

Applico $f(x)$: $f(1) \leq f(a_1) \leq f(a_3)$, cioè $1 \leq a_2 \leq a_4$

Quindi sui pari cresce, sui dispari decresce...

PIANO (i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile: serve per applicare $f(x)$)

(ii) $a_{2m+3} \leq a_{2m+1} \leq 1 \leq a_{2m} \leq a_{2m+2} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(inclusione con doppio applo $f(x)$)

(iii) $a_{2m+1} \rightarrow l \in \mathbb{R}$, $a_{2m} \rightarrow m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(decresce + ≥ 0)

(cresce ...)

(iv) $l = 0 \quad m = +\infty$

Dim. (iv)

Supponiamo per assurdo che sia $m \in \mathbb{R}$. Allora passo al limite nelle ricorrenze

$$a_{2m+1} = \frac{a_{2m} + 1}{2a_{2m}^2}$$
$$\downarrow$$
$$m = \frac{l+1}{2l^2}$$

$$a_{2m+2} = \frac{a_{2m+1} + 1}{2a_{2m+1}^2}$$
$$\downarrow$$
$$l = \frac{m+1}{2m^2}$$

[Invertito m ed l ...]

... come prima si ottiene $m = l = 1$, ma questi sono incompatibili con il p.to (ii) in quanto ad esempio $a_{2m} \geq a_0 = 2$.

L'unica possibilità rimasta è che $m = +\infty$. A questo p.to:

$$l = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{a_{2m} + 1}{2a_{2m}^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x^2} = 0,$$

— 0 — 0 —

Conclusioni :

- * lo spiraleggiamento dipende dalla decrescenza di $f(x)$
- * l'essere entrante od uscente dipende da f' nel p.to d'incontro,
- * volendo è tutto deciso da a_0, a_1, a_2

— 0 —