SSSUP 2013 — LEZIONE 13

Titolo nota 11/03/2013

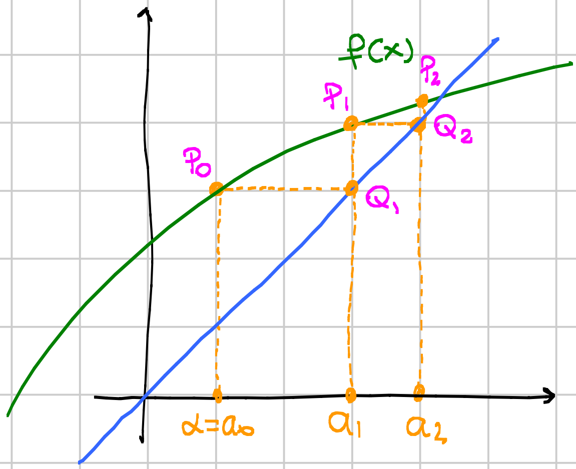
Succ. per ricorrenza non lineari 1° ordine autonome

$a_0 = \alpha$ dato $\qquad a_{n+1} = f(a_n) \quad \forall n \geq 0$

Obiettivo: stabilire il comportamento della successione, ed in particolare il suo limite, senza disporre di una formula esplicita per a_n.

Interpretazione grafica

- Disegno $y = f(x)$,
- Disegno $y = x$,
- Segno α sull'asse x,
- seguo lo slogan "verticale alla funzione, orizz. alla bisettrice" (N.B. trovo sempre uno ed un solo p.to)
- Così facendo le ascisse dei p.ti trovati sono $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$



$P_0 = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$ $\qquad Q_1 = (a_1, a_1)$ $\quad x = y$ $\quad$ stessa y di P_0

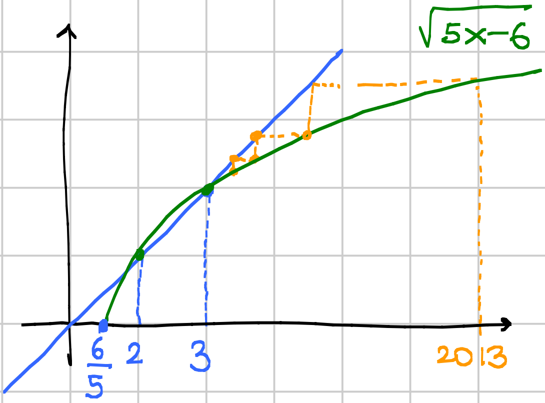
$P_1 = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$ $\quad$ stessa x di Q_1 $\quad y = f(x)$ $\qquad Q_2 = (a_2, a_2)$, e così via...

Nel disegno la successione a_n è crescente e tende all'incontro dei 2 grafici, cioè ad una soluzione dell'eq. $f(x) = x$.

Per fare dimostrazioni formali vedremo 2 "tecniche":

- PIANO CON LA MONOTONIA,
- PIANO CON LA DISTANZA.

PIANO CON LA MONOTONIA



Esempio 1 $\quad a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 6}$

$a_0 = 2013$

Disegno $f(x) = \sqrt{5x-6}$

Per sistemare correttamente i grafici, devo

* risolvere $f(x) = x \rightsquigarrow x = 2$ e $x = 3$
* risolvere $f(x) > x \rightsquigarrow x \in (2, 3)$

Dal grafico congetturo che a_n è decrescente e $a_n \to 3$.

$\boxed{\text{Piano}}$

(i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (zona di appartenenza)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (monotonia)

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (esistenza del limite in $\mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}$...)

(iv) $\ell = 3$ (chi è il limite)

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Induzione + disequazione

Passo base: banale

Passo induttivo: Ipotesi: $a_n \geq 3$ Tesi $a_{n+1} \geq 3$

$a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 6} \overset{?}{\geq} 3$ Risolvo la diseq. ed ottengo $a_n \geq 3$ che è quello che so per ipotesi.

Oppure:

$a_n \geq 3 \Rightarrow 5a_n \geq 15 \Rightarrow 5a_n - 6 \geq 9 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 6} \geq \sqrt{9} = 3.$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Induzione + applico $f(x)$

Nel passo induttivo prendo l'ipotesi $a_n \geq 3$ e applico $f(x)$ ottenendo

$f(a_n) \geq f(3)$, cioè $\underbrace{a_{n+1}}_{f(a_n)} \geq \underbrace{3}_{f(3)}$

ACHTUNG! Posso applicare $f(x)$ conservando i versi solo perché so che $f(x)$ è $\boxed{\text{DEBOLMENTE CRESCENTE}}$

$\boxed{\text{Dim. (ii)}}$ 1º modo: ricorrenza + disequazione

Devo dim. che $a_{n+1} \le a_n$, cioè $\sqrt{5a_n - 6} \le a_n$, questa conduce alla disequazione $\sqrt{5x-6} \le x$, cioè $f(x) \le x$. Questa è stata già risolta tracciando i grafici ed è verificata anche per $x \ge 3$.
Quindi $a_{n+1} \le a_n$ è vera se è vero che $a_n \ge 3$, ma questo è vero per il p.to (i).

2º modo: induzione + applico $f(x)$.

Voglio dim. per induzione che $a_{n+1} \le a_n$.

Passo base: $a_1 \overset{?}{\le} a_0$ $\quad \sqrt{5a_0 - 6} \le a_0 \quad \underbrace{\sqrt{10065-6}}_{100,\dots} \le 2013$

Passo induttivo: Ipotesi: $a_{n+1} \le a_n$ $\quad$ Tesi: $a_{n+2} \le a_{n+1}$

Per dim. il passo induttivo prendo l'Hp e applico $f(x)$ (posso ...)

$$a_{n+1} \le a_n \Rightarrow \underset{a_{n+2}}{\underset{\parallel}{f(a_{n+1})}} \le \underset{a_{n+1}}{\underset{\parallel}{f(a_n)}}$$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Teo. succ. monotone (limitata infer. + deb. decr. $\Rightarrow$ lim. $\in \mathbb{R}$)

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Passo al limite nella ricorrenza. So che $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

$$a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 6}$$
$\downarrow \qquad \downarrow$ ← uso $f(x)$ continua
$$\ell = \sqrt{5\ell - 6}$$

Questa è l'equazione $x = f(x)$, già risolta. Ci sono 2 intersezioni

$\ell = 2 \to$ scartata perché incompatibile con p.to (i)

$\ell = 3 \to$ unico limite possibile

—o—o—

$\boxed{\text{PIANO CON LA DISTANZA}}$ Pongo $d_n = |a_n - 3|$

= distanza di a_n dal presunto limite

Obiettivo: dimostrare che $d_n \to 0$, che implica $a_n \to 3$

$\boxed{\text{Piano}}$ (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (come prima)

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{6} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{1}{6}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione a partire da (ii))

(iv) $d_n \to 0$ (Carabinieri a partire da (iii))

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{d_n} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\left(\frac{1}{6}\right)^n d_0}$$

È importante che al p.to (ii) ci sia un $\boxed{\text{coeff. fisso} < 1}$ (ad esempio $\frac{1}{6}$)

$\boxed{\text{Dim. (ii)}}$

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 3| \overset{\text{uso ric.}}{=} \left|\sqrt{5a_n - 6} - 3\right| = \left|(\sqrt{\ldots} - 3) \cdot \frac{\sqrt{\ldots} + 3}{\sqrt{\ldots} + 3}\right|$$

$$= \frac{|5a_n - 15|}{\sqrt{5a_n - 6} + 3} = \frac{5 d_n}{\sqrt{5a_n - 6} + 3} \leq \frac{5}{6} d_n$$

denom. + piccolo: metto $a_n = 3$

Non sono riuscito a dim. che $d_{n+1} \leq \frac{1}{6} d_n$, ma ho dimostrato che $d_{n+1} \leq \frac{5}{6} d_n$ e questo mi basta perché $\boxed{\frac{5}{6} < 1}$

Cosa ho in realtà fatto?

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 3| = |f(a_n) - f(3)| \leq L\,|a_n - 3| = L\, d_n$$

uso ricorr. + $f(3) = 3$

dove L è la costante di Lipschitzianità di $f(x)$ nella zona interessata, nel nostro caso per $x \geq 3$.

Volendo L la posso calcolare con il sup della derivata, cioè

$$L = \sup\{ |f'(x)| : x \geq 3 \}$$

$$= \sup\left\{ \frac{5}{2\sqrt{5x-6}} : x \geq 3 \right\} = \frac{5}{6}$$

— o — o —

Piano con la monotonia : * $f(x) = x$ ⇝ risolvere
* $f(x) > x$ ⇝ risolvere
* $f(x)$ crescente nella zona interessata

Piano con la distanza : * $f(x) = x$ ⇝ risolve
* $f(x)$ lip. nella zona con costante $L < 1$.

— o — o —

Oss. Il piano con la distanza fornisce una stima della velocità di convergenza. Nell' esempio

$$d_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n d_0 .$$

— o — o —