SSSUP 2013 — LEZIONE 12

Titolo nota 19/02/2013

$x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}$ $\qquad R^2 = aR + b$

→ Se $\Delta = 0$, allora l'equazione ha un'unica radice R ed $R^n = x_n$ è una soluzione della ricorrenza.

Un'altra soluzione è $x_n = nR^n$. Basta sostituire

$$\underbrace{(n+1)R^{n+1}}_{x_{n+1}} \overset{?}{=} a\underbrace{nR^n}_{x_n} + b\underbrace{(n-1)R^{n-1}}_{x_{n-1}}$$

$$nR^2 + R^2 \overset{?}{=} anR + bn - b \,, \qquad n\underbrace{(R^2 - aR - b)}_{\overset{\shortparallel}{0}\text{ per def. di } R} + \underbrace{(R^2 + b)}_{\overset{\shortparallel}{0}\text{ (vedi sotto)}} \overset{?}{=} 0$$

Se R è radice doppia di $R^2 - aR - b$ vuol dire che $-b = \text{prod. rad.} = R^2$, quindi anche l'altro termine è 0.

In conclusione una base è R^n, nR^n.

→ Se $\Delta < 0$ posso trovare una base fatta di successioni reali.

Scrivo le radici R_1 ed R_2 in forma esponenziale

$$R_1 = A\, e^{iB} \qquad\qquad R_2 = A\, e^{-iB}$$

quindi i 2 elementi della base su $\mathbb{C}$ sono

$$R_1^n = A^n e^{iBn} = A^n \cos(Bn) + i A^n \sin(Bn)$$

$$R_2^n = A^n e^{-iBn} = A^n \cos(Bn) - i A^n \sin(Bn)$$

Quindi UNA base reale è

$$x_n = A^n \cos(Bn) \qquad\qquad y_n = A^n \sin(Bn)$$

Volendo uno potrebbe ignorare i numeri complessi e verificare per induzione che per opportuni valori di A e B le 2 succ. scritte sopra sono soluzioni.

— o — o —

<u>Teoria generale</u>: per una succ. per ricorr. lineare omogenea con dipendenza dai k termini precedenti, la soluzione generale è combinazione lineare di k elementi di una base che si ottiene a partire dalle radici del polinomio associato alla ricorrenza nel seguente modo:

1 – ogni radice reale R di molt. 1 produce R^n

2 – " " " " " " m produce $R^n, nR^n, n^2R^n, \ldots, n^{m-1}R^n$

3 – ogni coppia di radici complesse coniugate $Ae^{\pm iB}$ di molt. 1 produce $A^n\cos(Bn)$, $A^n\sin(Bn)$

4 – ogni coppia di radici complesse coniugate $Ae^{\pm iB}$ di molt m produce gli stessi elementi di prima moltiplicati per n^i con $0 \le i \le m-1$ (in totale $2m$ elementi).

— o — o —

<u>Esempio</u> Successione di Fibonacci $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $x_0 = 0, x_1 = 1$

Polinomio associato $R^2 = R+1$, $R^2 - R - 1 = 0$

$R = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La soluzione generale è

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Imponendo le condizioni iniziali trovo c_1 e c_2:

$x_0 = c_1 + c_2 = 0$ $\qquad c_2 = -c_1$

$x_1 = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$ $\qquad c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$c_1\sqrt{5} = 1$ $\qquad c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Formula per i numeri di Fibonacci

$$\boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}}$$

Volendo si dimostra direttamente per induzione

<u>Oss 1</u> I numeri di Fibonacci sono interi (si dimostra per induzione a partire dalla ricorrenza). Quindi facendo il conto per un n specifico i $\sqrt{5}$ "si semplificano".

<u>Oss. 2</u> Quando $n \to +\infty$ il secondo esponenziale $\to 0$ (la base ha valore assoluto <1), quindi x_n cresce esponenzialmente come il 1° termine.

<u>Oss. 3</u> $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, quindi non intero.

<u>Esempio</u> $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ $\qquad x_0 = 2013$

Domanda: è possibile scegliere x_1 in modo che x_n sia limitata?

Idea: $x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ è limitata $\Leftrightarrow c_1 = 0$

Quindi ci può essere solo c_2, e deve valere 2013 per avere $x_0 = 2013$.
Ma allora

$$x_1 = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{c_1} \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \underset{\substack{\shortparallel \\ c_2}}{2013} \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2013 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$\boxed{\text{Domanda 2}}$ Come trovare una soluzione speciale nel caso non omogeneo?
Andando ad occhio !!!

$$x_{n+1} = 2x_n + 5x_{n-1} + n^2 + 3$$

In questo caso la cerco del tipo $z_n = an^2 + bn + c$. Sostituendo trovo 3 equazioni (coeff. di n^2, n e termine noto) lineari in 3 incognite (a, b, c). Di solito va bene.

$\boxed{\text{Regola "generale"}}$ Se il termine non omogeneo è un polinomio di grado d, allora il tentativo ragionevole è un polinomio dello stesso grado a coeff. incogniti.

$x_{n+1} = 2x_n + 5x_{n-1} + 2^n$. Cerco una sol. del tipo $z_n = a \cdot 2^n$

$$\underbrace{a \cdot 2^{n+1}}_{z_{n+1}} = \underbrace{2 \cdot a \cdot 2^n}_{2z_n} + \underbrace{5a \cdot 2^{n-1}}_{5z_{n-1}} + 2^n \quad ; \quad \cancel{4a} = \cancel{4a} + 5a + 2$$
$$a = -\frac{2}{5}$$

$\boxed{\text{Regola "generale"}}$ Esponenziale $\leadsto$ multiplo dello stesso esponenziale

$x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1} + 2^n$ Provo $z_n = a \cdot 2^n$

$$a \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot a 2^n - 2a 2^{n-1} + 2^n \quad ; \quad \cancel{4a} = \cancel{6a} - \cancel{2a} + 2$$

È andata male perché doveva in quanto l'eq. omogenea associata $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$ ha polinomio $R^2 = 3R - 2$ e $R = 2$ è radice, quindi $z_n = a \cdot 2^n$ è una sol. dell'omogenea.
In questo caso il tentativo giusto è $z_n = an \cdot 2^n$

$$a(n+1)2^{n+1} = 3an\,2^n - 2a(n-1)2^{n-1} + 2^n \quad ; \quad \cancel{4an} + 4a = \cancel{6an} - \cancel{2an} + 2a + 2$$

$n \cdot$ (polinomio di cui $R = 2$ è radice)