SSSUP 2013 — LEZIONE 11

Titolo nota 19/02/2013

$\boxed{\text{SUCCESSIONI PER RICORRENZA LINEARI}}$

$a_{n+1} = f(a_n, n)$ $\quad a_0$ dato

$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, n)$ $\quad a_0$ e a_1 dati

In generale: dipendenza da k termini precedenti

Dipendenza da un solo termine precedente $\quad x_{n+1} = a x_n + b \quad x_0 = \alpha$ dato

Obiettivo: trovare formula esplicita per x_n.

$\boxed{1° \text{ modo: bovino}}$ Calcolo i primi termini e cerco di capire

$x_0 = \alpha, \quad x_1 = a\alpha + b, \quad x_2 = a x_1 + b = a^2\alpha + ab + b, \quad x_3 = a^3\alpha + a^2 b + ab + b$

Congettura: $x_n = a^n\alpha + b\underbrace{(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})}_{\text{somma progr. geom.}} = a^n\alpha + b\dfrac{a^n - 1}{a-1}$

Abbiamo ottenuto che

$$\boxed{x_n = a^n\alpha + b\frac{a^n-1}{a-1}}$$

se $a \neq 1$. Il caso $a = 1$ è davvero banale

Dim. ufficiale: banale induzione

$\boxed{2° \text{ metodo: semi-astuto}}$ Si trova una succ. costante $x_n \equiv \ell$ che risolve la ricorrenza (prescindendo dal dato iniz.)

Deve essere $\underset{\uparrow \atop x_{n+1}}{\ell} = a \underset{\uparrow \atop x_n}{\ell} + b$, cioè $\ell(1-a) = b$, cioè $\ell = \dfrac{b}{1-a}$

Pongo $y_n = x_n - \ell$ e vedo cosa risolve y_n:

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \ell \underset{\uparrow \atop \text{uso ricorr.}}{=} a x_n + b - \ell \underset{\uparrow \atop x_n = y_n + \ell}{=} a(y_n + \ell) + b - \ell$$

$$= a y_n + \underbrace{\boxed{a\ell + b - \ell}}_{\text{"0 per def. di } \ell}$$

Ho quindi ottenuto che $y_{n+1} = a y_n$, da cui con una banale induzione si ottiene $y_n = a^n y_0 = a^n (\underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{x_0}} - \ell)$.

In conclusione:

$$x_n = y_n + \ell = a^n (\alpha - \ell) + \ell = a^n \left(\alpha - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

$$= a^n \alpha + \frac{b}{1-a}(1-a^n)$$

che è la stessa formula di prima.

$\boxed{\text{3° modo: vero uso della linearità}}$ $\quad x_{n+1} = a x_n + f(n)$

Supponiamo di trovare "ad occhio" una successione che verifica la ricorrenza, ma magari non il dato iniziale. Sia z_n questa succ.

Come prima pongo

$y_n := x_n - z_n$. Ottengo

$$y_{n+1} = x_{n+1} - z_{n+1} = \underbrace{a x_n + \cancel{f(n)}}_{x_{n+1}} \underbrace{- a z_n - \cancel{f(n)}}_{-z_{n+1}} = a(x_n - z_n) = a y_n$$

da cui $y_n = a^n y_0 = a^n (x_0 - z_0)$.

Si ha quindi che

$$x_n = y_n + z_n = a^n (x_0 - z_0) + z_n$$

Importanza della formula: se conosco una soluzione z_n qualunque della ricorrenza, allora le conosco tutte.

<u>Interpretazione in termini di algebra lineare</u>: consideriamo lo spazio vettoriale Succ delle successioni di numeri reali e consideriamo l'operatore lineare

$$\Phi : \text{Succ} \to \text{Succ}$$
$$\{x_n\} \to \{x_{n+1} - a x_n\}$$

$\text{Ker}\,\Phi$ = tutte le successioni x_n tali che $x_{n+1} = a x_n$, cioè tutte le successioni che verificano la ricorrenza in versione omogenea, cioè tutte le succ. del tipo $x_n = a^n \cdot \alpha$.

Risolvere la ricorrenza $x_{n+1} = a x_n + f(n)$ equivale a risolvere

$$\Phi(\{x_n\}) = \{f(n)\}$$

e quindi per fatti noti tutte le soluzioni si scrivono come

$$x_n = \underbrace{\text{soluzione qualunque}}_{z_n} + \underbrace{\text{elemento generico del ker}}_{y_n}$$

<u>Esempio</u> $x_{n+1} = 3x_n + n$

Elemento generico del ker = soluzione generica di $y_{n+1} = 3y_n$, cioè $y_n = 3^n \cdot c$

Per trovare una soluzione qualunque vado ad occhio, cercandola del tipo $z_n = an+b$, con a e b coeff. incogniti. Sostituisco e trovo

$$\underbrace{a(n+1)+b}_{z_{n+1}} = \underbrace{3an+3b}_{3z_n} + n \qquad \begin{cases} a = 3a+1 & \text{coeff. di } n \\ a+b = 3b & \text{termine noto} \end{cases}$$

$$2a = -1 \qquad a = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = 2b \qquad b = -\frac{1}{4}$$

Quindi

$$x_n = \underbrace{3^n \cdot c}_{y_n} + \underbrace{-\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}}_{z_n}$$

Al variare di c, questa descrive tutte le soluzioni (se conosco il dato iniziale x_0, trovo univocamente c).

[Volendo la formula finale si può verificare per induzione].

Teoria in generale: → come trovare elemento generico del ker
→ come trovare soluzione qualunque della ricorrenza non omogenea.

—o —o —

$\boxed{\text{Dipendenza da 2 termini precedenti}}$

Caso omogeneo: $x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}$

Il ker ha dimensione 2 (posso fissare come mi pare x_0 e x_1 e a quel p.to x_n è univocamente determinata).

Detto altrimenti:

→ sia u_n la soluzione con $u_0 = 1$ e $u_1 = 0$

→ sia v_n " " " $v_0 = 0$ e $v_1 = 1$

Allora la soluzione x_n con dati $x_0 = \alpha$ e $x_1 = \beta$ sarà

$$x_n = \alpha u_n + \beta v_n$$

[Esercizio: verificare che x_n risolve la ricorrenza e prende i dati iniziali (è essenziale la linearità)]

Cerco soluzioni della ricorrenza omogenea della forma $x_n = R^n$.

Sostituisco:

$$\underbrace{R^{n+1}}_{x_{n+1}} = a \underbrace{R^n}_{x_n} + b \underbrace{R^{n-1}}_{x_{n-1}} \rightsquigarrow R^2 = aR + b$$

$$\rightsquigarrow R^2 - aR - b = 0$$

Ho 3 casi:

→ se $\Delta > 0$ ho 2 radici reali R_1 ed R_2, quindi ho trovato 2 elementi della base R_1^n ed R_2^n

→ se $\Delta < 0$ ho 2 radici complesse coniugate R_1 ed R_2, quindi ho trovato due elementi della base sui complessi R_1^n ed R_2^n

→ se $\Delta = 0$ ho 1 radice reale di molt. 2, quindi avrei un solo elemento R^n della base.