SSSUP 2013 — LEZIONE 10

Titolo nota 12/02/2013

$\boxed{\text{Teorema di estensione}}$ $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ unif. continua.
Allora esiste un'unica funzione $g : \bar{A} \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$, e tale che

chiusura di A

$g(x)$ sia continua (addirittura unif. cont.)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $x_0 \in \bar{A}$. Voglio definire $g(x_0)$ (N.B.: nessuno vieta che $x_0 \in A$).
Poiché $x_0 \in \bar{A}$, allora esiste una successione x_n di elementi di A t.c. $x_n \to x_0$. Vorrei porre

$$g(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n).$$

Devo verificare che il limite esiste. Provo a dim. che $f(x_n)$ è una succ. di Cauchy. Fisso $\varepsilon > 0$. Poiché f è unif. continua abbiamo che $\exists\, \delta > 0$ t.c. se $|x-y| < \delta$, allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Ora $x_n \to x_0$, quindi x_n è di Cauchy, quindi $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|x_n - x_m| < \delta$ per ogni $n \geq n_0$, per ogni $m \geq n_0$. Ma allora $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$, $m \geq n_0$, quindi $f(x_n)$ è di Cauchy. Dunque il limite esiste.

Restano da verificare 3 cose:
1. Che il valore del limite NON dipende dalla successione che ho scelto,
2. Che $g(x)$ coincide con $f(x)$ per ogni $x \in A$,
3. Che $g(x)$ è a sua volta unif. continua.

<u>Verifica di $\boxed{1}$</u> $x_n \to x_0$ e $y_n \to x_0$ 2 successioni. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} f(y_n)$$

Supponiamo per assurdo che ci siano 2 limiti diversi ℓ_1 ed ℓ_2

Allora per n grande $f(x_n)$ è vicino ad l_1 e $f(y_n)$ è vicino ad l_2.
Ma x_n ed y_n sono vicini tra di loro perché tendono ad x_0, quindi $f(x_n)$ e $f(y_n)$ devono essere vicini tra di loro.

<u>Verifica di ②</u> Sia $x_0 \in A$. Allora posso scegliere come successione $x_n = x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (quella costante).
Allora $f(x_n) = f(x_0) \to f(x_0)$.

<u>Verifica di ③</u> Devo dimostrare che g è unif. continua, cioè che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $|x-y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Scelgo $x_n \to x$ e $y_n \to y$ in modo che $f(x_n) \to g(x)$
$f(y_n) \to g(y)$

Allora $|x_n - y_n| \to |x-y| < \delta$, quindi definitivamente $|x_n - y_n| < \delta$
Quindi per l'uniforme continuità di f avremo che $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Passando al limite questa otteniamo che $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$, ma questo non rovina l'uniforme continuità di g (che si può definire con $<$ o $\leq$ indifferentemente).

—o—o—

<u>Osservazione</u> Abbiamo ottenuto che le coppie ε, δ che vanno bene per l'uniforme continuità di f vanno bene anche per g.

—o—o—

<u>Applicazione</u> Se $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua, anche solo localmente (cioè solo sui sottoinsiemi limitati), allora esiste un'unica funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$.

Questo permette, per esempio, di definire l'esponenziale $f(x) = a^x$ con base $a > 0$. Basta definirlo stile precorso per $x \in \mathbb{Q}$, poi dim. che è unif. continuo, e usare il teo. di estensione.

—o—o—

TEOREMI STILE HÔPITAL PER SUCCESSIONI

Caso $\frac{0}{0}$ Siano a_n e b_n due successioni tali che

(i) $a_n \to 0$,

(ii) $b_n \to 0$,

(iii) b_n strett. decrescente.

Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \le \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

Dim. Basta dim. la disuguagliauza di destra.
Lo facciamo nel caso in cui il limsup di dx è $L \in \mathbb{R}$
(il caso $L = +\infty$ è banale, il caso $L = -\infty$ è analogo).
Fisso $\varepsilon > 0$. Per la caratterizzazione avremo che $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \le L + \varepsilon \qquad \forall\, n \ge n_0$$

Siano ora $k > n \ge n_0$. Allora

$$a_n - a_k = (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + (a_{k-1} - a_k)$$

Ho usato che i denom. erano positivi...

$$\to \le (L+\varepsilon)\left\{ (b_n - b_{n+1}) + (b_{n+1} - b_{n+2}) + \dots + (b_{k-1} - b_k) \right\}$$

$$= (L+\varepsilon)(b_n - b_k).$$

Ma allora

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_k + a_k}{b_n - b_k + b_k} = \frac{\cancel{b_n - b_k}}{\cancel{b_n - b_k}} \cdot \frac{\frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} + \frac{a_k}{b_n - b_k}}{1 + \frac{b_k}{b_n - b_k}} \le \frac{L + \varepsilon + \boxed{\frac{a_k}{b_n - b_k}}}{1 + \boxed{\frac{b_k}{b_n - b_k}}}$$

$\frac{0}{b_n} = 0$ per $k \to +\infty$

stesso motivo 0

Ho così dimostrato che $\frac{a_n}{b_n} \le L + \varepsilon \quad \forall\, n \ge n_0$, quindi

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \le L + \varepsilon.$$ Poichè ε è arbitrario, $\limsup \le L$

$\boxed{\text{Caso } \frac{\infty}{\infty}}$ Supponiamo che

(i) $a_n \to +\infty$, $\leftarrow$ (poi non serve)

(ii) $b_n \to +\infty$,

(iii) b_n strettamente crescente.

Allora come prima con

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \qquad e \qquad \frac{a_n}{b_n}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Come prima abbiamo che $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Come prima, dati $k > n \geq n_0$ abbiamo che

$$a_k - a_n = (a_k - a_{k-1}) + \dots + (a_{n+1} - a_n)$$

$$\leq (L+\varepsilon) \{ (b_k - b_{k-1}) + \dots + (b_{n+1} - b_n) \}$$

$$= (L+\varepsilon)(b_k - b_n).$$

Come prima

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{a_k - a_n + a_n}{b_k - b_n + b_n} \leq \frac{(L+\varepsilon)(b_k - b_n) + a_n}{b_k - b_n + b_n} = \frac{L + \varepsilon + \frac{a_n}{b_k - b_n}}{1 + \frac{b_n}{b_k - b_n}}$$

Faccio a dx e sx il limsup per $k \to +\infty$. Ottengo

$$\limsup_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} \leq \limsup_{k \to +\infty} \frac{L + \varepsilon + \overbrace{\boxed{\frac{a_n}{b_k - b_n}}}^{0}}{1 + \underbrace{\boxed{\frac{b_n}{b_k - b_n}}}_{0}} = L + \varepsilon$$

perché $b_k \to +\infty$ e a_n e b_n sono fissi

per lo stesso motivo

Finale come prima.

$\boxed{\text{Oss.}}$ Non ho usato che $a_n \to +\infty$, ma solo che $b_n \to +\infty$