SSSUP 2013 — LEZIONE 09

Titolo nota 12/02/2013

COMPLETEZZA

<u>Def.</u> Una successione x_n si dice <u>successione di CAUCHY</u> se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n - a_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \ \forall m \geq n_0$

↑ dipende da ε

(se n ed m sono grandi, i termini della succ. sono vicini)

Fatto 1 Ogni successione di Cauchy è limitata.

<u>Dim.</u> Uso def. con $\varepsilon = 1$ e $m = n_0$. Ottengo che

$$|a_n - a_{n_0}| \leq 1 \quad \forall n \geq n_0$$

I termini con indice $\geq n_0$ sono intrappolati, i precedenti sono un numero finito.

Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **COMPLETO** se tutte le succ. di Cauchy a valori in A convergono ad un elemento di A.

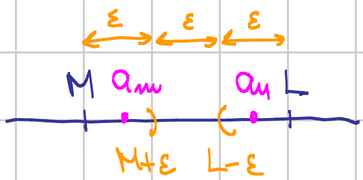
Fatto 2 $\mathbb{R}$ è completo, cioè tutte le succ. di Cauchy convergono in $\mathbb{R}$.
Conseguenza: $A \subseteq \mathbb{R}$ è completo se e solo se A è chiuso.

Dim. fatto 2 Sia a_n una succ. di Cauchy. Sappiamo già che è limitata. Quindi esistono e sono reali il liminf ed il limsup. Basta dimostrare che coincidono.
Supponiamo per assurdo che sia

$$L = \limsup_{n \to +\infty} a_n$$

$$M < N$$

$$M = \liminf_{n \to +\infty} a_n$$



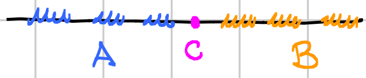
Pongo $\varepsilon = \dfrac{L-M}{3}$. Frequentemente abbiamo che $a_n \geq L - \varepsilon$ e

Frequentemente abbiamo che $a_m \le M+\varepsilon$.
Quindi posso trovare valori di n e di m, grandi a piacere, tali che $a_n - a_m > \varepsilon$. Questo contraddice l'essere di Cauchy.

— o — o —

<u>Filosofia</u> Quale proprietà distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$? Ci sono due possibili alternative:

[1] <u>ASSIOMA DI CONTINUITÀ</u>: dati 2 sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $a \le b$ per ogni $a \in A$ e ogni $b \in B$, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che
$a \le c \quad \forall a \in A \quad$ e $\quad c \le b \quad \forall b \in B$



Dall'assioma di continuità seguono l'esistenza di sup e inf e tutto quello che ne segue

$\boxed{\text{BASATO FORTEMENTE SULL'ORDINAMENTO}}$

[2] <u>COMPLETEZZA</u>: convergenza delle successioni di Cauchy

$\boxed{\text{BASATO FORTEMENTE SULLA DISTANZA}}$

— o — o —

<u>Serie</u>: somma infinita $\sum_{n\ge 0}^{\infty} a_n$

Somme parziali: $S_0 = a_0$, $S_1 = a_0 + a_1$, ..., $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

Si dice che una serie converge se S_n ha un limite reale

$\boxed{\text{Criterio di assoluta convergenza}}$

Se $\sum_{n\ge 0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora anche $\sum_{n\ge 0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{\text{Dim. 1}}$ $\quad a_n = |a_n| - (|a_n| - a_n)$, quindi

$$\sum_{n\ge 0}^{\infty} a_n = \sum_{n\ge 0}^{\infty} |a_n| - \sum_{n\ge 0}^{\infty} (|a_n| - a_n)$$

se convergono le 2 a DX, converge anche quella a SX.

La prima a dx converge per ipotesi. La seconda converge perché

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|,$$

quindi

$$\sum_{n \geq 0}^{\infty} (|a_n| - a_n) \leq 2 \sum_{n \geq 0}^{\infty} |a_n| \quad \text{e quindi converge.}$$

<u>Oss.</u> Questa dim. è equivalente a considerare la serie dei positivi più la serie dei negativi.

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ Sia $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ e sia

$$\Sigma_n = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

Dati 2 interi $m > n$ abbiamo che

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| \\ &\leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m| \\ &= \Sigma_m - \Sigma_n \\ &= |\Sigma_m - \Sigma_n| \end{aligned}$$

Sapendo per ipotesi che $\sum |a_n|$ converge, abbiamo che Σ_n converge, ma allora Σ_n è di Cauchy, ma allora anche S_n è di Cauchy, ma allora anche S_n converge, ma allora $\sum a_n$ converge.

Σ_n di Cauchy $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.c. $|\Sigma_n - \Sigma_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$

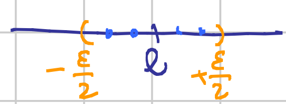
ma allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.c. $|S_n - S_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$

stesso n_0

—o—o—

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Se a_n converge, allora a_n è di Cauchy

<u>Dim.</u> Supponiamo che $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Allora $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$.



Ma allora

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall m \geq n_0.$$

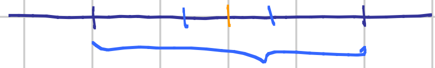
—o—o—

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Si può dimostrare $\underbrace{\text{B-W}}$ usando la completezza.

cioè che ogni succ. limitata ammette una s.succ. convergente.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta mostrare che ogni succ. limitata ammette una s. succ. di Cauchy.

Idea: costruisco una successione di sottoinsiemi



$\mathbb{N} = N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$

in questo modo

* Divido l'intervallo in 1 parti. Per ogni indice il corrispondente termine sta in quella parte
* Divido l'intervallo in 2 parti. Esiste un insieme di indici <u>infinito</u> N_2 per cui i termini stanno dalla stessa parte
* Divido l'intervallo in 3 parti. Esiste un insieme di indici <u>infinito</u> N_3 per cui i termini stanno dalla stessa parte...

e così via...

$\boxed{\text{Procedimento diagonale}}$ Prendo $n_1 \in N_1$, poi prendo $n_2 \in N_2$ con $n_2 > n_1$, poi prendo $n_3 \in N_3$ con $n_3 > n_2$, e così via...

La corrispondente sottosucc. a_{n_k} è di Cauchy.

Perché?

Fisso $\varepsilon > 0$. Allora $\exists\, k_0$ t.c. quando divido in k_0 parti queste sono tutte di ampiezza $\leq \varepsilon$. Da n_{k_0} in poi tutti gli indici stanno in N_{k_0}, quindi tutti gli elementi che ho preso stanno nella stessa parte, quindi distano meno di ε.

— o — o —