SSSUP 2013 — LEZIONE 08

Titolo nota 07/02/2013

FUNZIONI LIPSCHITZIANE E HÖLDERIANE

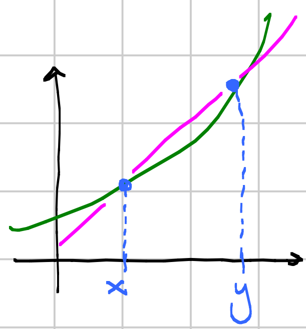
<u>Def.</u> Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice lipschitziana in A se esiste una costante L tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \qquad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

<u>Oss.</u> Se un certo valore L va bene, allora vanno bene tutti i successivi. Il più piccolo valore di L che va bene è dato dalla formula

$$\sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} : x \in A,\ y \in A,\ x \neq y \right\}$$

e si chiama <u>COSTANTE DI LIPSCHITZ</u> di $f(x)$ in A.



<u>Significato geometrico</u> $\dfrac{f(x) - f(y)}{x-y}$ è il coeff. angolare della retta passante per $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$. La lipschitzianità, ed in particolare la costante di lip., sono una misura della pendenza del grafico.

<u>Esempi</u> $f(x) = x^2$ è lip. in $[-10, 10]$ e non è lip. in $\mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x}$ non è lip. in $[0, 1]$ ma è lip. in $[1, +\infty)$

<u>Def.</u> Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice <u>Hölderiana</u> in A di esponente $\alpha \in (0,1)$ se esiste una costante H t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq H\,|x-y|^{\alpha} \qquad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Come prima, si definisce costante di Hölder il più piccolo H che va bene, definito dalla formula

$$\sup\left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} : x\in A,\ y\in A,\ x\neq y \right\}$$

Oss. Lipschitzianità = Hölderianità di esponente $\alpha = 1$.

Esempio $f(x) = \sqrt{x}$ è Hölderiana con esponente $\frac{1}{2}$ in tutto $[0,+\infty)$, quindi in particolare anche in $[0,1]$.
Si tratta di dimostrare che esiste H t.c.

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq H\sqrt{|x-y|}$$

Proviamo con $H=1$. Possiamo assumere $x>y$

$$\sqrt{x}-\sqrt{y} \overset{?}{\leq} \sqrt{x-y} \qquad \cancel{x}+y-2\sqrt{xy} \overset{?}{\leq} \cancel{x}-y \qquad \cancel{2}y \leq \cancel{2}\sqrt{xy}$$

vera perché $x>y$

È facile verificare che $H=1$ è la scelta migliore (prendere $y=0$).

Oss. Valgono le seguenti implicazioni:

Lipschitziana $\Rightarrow$ uniform. continua $\Rightarrow$ continua
Hölderiana $\nearrow$

Se l'insieme A è limitato, allora
Lipschitziana $\Rightarrow$ Hölderiana per ogni $\alpha\in(0,1)$
Hölderiana con un certo $\alpha\in(0,1)$ $\Rightarrow$ Hölderiana con ogni $\beta\in(0,\alpha)$

Achtung! $f(x) = x$ non è $\frac{1}{2}$-Hölder in $\mathbb{R}$. Basta prendere $y=0$

$$\underbrace{|x-0|}_{f(x)-f(y)} \leq H\sqrt{|x|} \quad \text{e questo è assurdo.}$$

Sui limitati invece funziona

$\boxed{\text{Dim che Lip} \Rightarrow \text{Höld}}$

positivo

$$|f(x)-f(y)| \le L|x-y| = L|x-y|^{1-\alpha}\,|x-y|^{\alpha}$$
$$\le \underbrace{L\,|\text{ampiezza}(A)|^{1-\alpha}}_{H} \cdot |x-y|^{\alpha}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Legami tra Lipschitzianità e derivata prima}}$

① Le funzioni Lip. non sono obbligate ad avere la derivata prima. (esempio classico: $f(x)=|x|$)

② Se f è Lip. in un certo insieme A, allora $f'(x)$, DOVE ESISTE, verifica

$$|f'(x)| \le \text{costante di Lip.}$$

(Rapporto incrementale $\le L$ sempre... passo al limite)

③ Se A è un insieme convesso (tutto $\mathbb{R}$, semiretta, intervallo) e $f: A \to \mathbb{R}$ è derivabile in A, allora f è Lip. in A se e solo se

$$\sup\{|f'(x)| : x \in A\} < +\infty.$$

Inoltre il sup è proprio la costante di Lip.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia L il sup, che suppongo $\in \mathbb{R}$. Dimostro che L va bene

Lagrange

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)\cdot(x-y)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\le L}\cdot|x-y| \le L\cdot|x-y|$$

p.to misterioso tra x e y

Resta da dimostrare che nessun $L' < L$ va bene. Se andasse bene, per il p.to ② avremmo che $|f'(x)| \le L'$ in tutto A, quindi il sup sarebbe $\le L'$, mentre abbiamo assunto che sia L.

— o — o —

Oss. La faccenda del convesso serve per poter usare Lagrange (f deve essere definita tra x e y).

Oss. Le funzioni Hölderiane con esponente >1 sono solo le funzioni localmente costanti (se A è fatto da più pezzi, posso usare costanti diverse in pezzi diversi).

Dim. Se così fosse $|f(x)-f(y)| \leq H|x-y|^{\alpha}$ con $\alpha>1$, allora

$$|f'(x_0)| = \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leq \lim_{x\to x_0} \frac{H|x-x_0|^{\alpha}}{|x-x_0|}$$

$$= \lim_{x\to x_0} H|x-x_0|^{\overbrace{\alpha-1}^{\alpha>1}} = 0$$

— o — o —

Oss. Lipschitzianità e Hölderianità forniscono esempi di moduli di continuità.

$\omega(r) = Lr$ Lip: dipendenza lineare

$\omega(r) = Hr^{\alpha}$ Hölderianità

— o — o —

Per dim. l'unif. continuità di una funzione si può usare Heine-Cantor oppure sperare nella Lip - Hölderianità

Esercizi $A=[0,1]$

1. Trovare $f: A \to \mathbb{R}$ unif. continua ma non Hölderiana con nessun α
2. " " Hölderianità con ogni $\alpha \in (0,1)$, ma non Lip.
3. " " Hölderiana solo per $\alpha \in (0,\frac{1}{2}]$
4. " " " solo per $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$
5. Dire cosa c'è di vero nel seguente enunciato:

   f è $\frac{1}{2}$-Hölder $\Leftrightarrow$ f^2 Lipschitz

6. Determinare per quali $\alpha \in (0,1)$ si ha che $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ è Hölder (è una funzione continua, dunque unif. continua)

7. Dimostrare che ogni $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua è sublineare, cioè esistono A e B t.c. $f(x) \leq Ax+B$ per ogni $x \geq 0$.