

UNIFORME CONTINUITÀ

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è uniformemente continua in A se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \forall y \in A \text{ si ha l'implicazione}$$

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Commento: cosa c'è di diverso rispetto alla continuità?

Continuità: $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in A \exists \delta > 0 \forall y \in A$ si ha l'implicazione

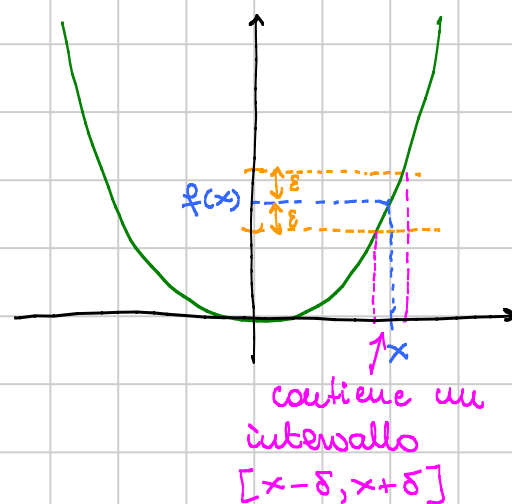
$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Nella continuità δ dipende da ε e da x . Nell'unif. cont. δ dipende solo da ε . Detto altrimenti: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ universale che va bene per tutti gli $x \in A$.

Esempio $A = \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$. Ovviamente è continua.

È unif. continua?

Intuitivamente non esiste un δ universale: se prendo lo stesso $\varepsilon > 0$ e considero x sempre più grandi, il δ necessario è sempre più piccolo.



Formalmente: $\varepsilon = 1$, Fisso un certo x_0 e cerco dove succede che

$$|x^2 - x_0^2| \leq \varepsilon$$

↑
 $f(x) - f(x_0)$

Risolvo e trovo un intervallo la cui ampiezza tende a 0 quando $x_0 \rightarrow +\infty$ o $x_0 \rightarrow -\infty$.

Esempio $f(x) = x^2$, $A = [-10, 10]$. Allora $f(x)$ è unif. cont. in A .

Motivo intuitivo: il δ che va bene agli estremi va bene ovunque.

Motivo formale: si tratta di risolvere la disequazione oppure esibire esplicitamente un δ , funzione di ε , che va bene.

$\delta = \frac{\varepsilon}{20}$. Siano x e y in A t.c. $|x-y| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{20}$. Allora

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \underbrace{|x+y|}_{\leq 20} \cdot \underbrace{|x-y|}_{\leq \frac{\varepsilon}{20}} \leq \varepsilon.$$

Esempio $A = (0, 1]$. Esiste $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ che sia continua ma non unif. cont.?

Sì, basta prendere $f(x) = \frac{1}{x}$



TEOREMA (HEINE - CANTOR) Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è compatto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f è anche unif. continua in A .

Dim. Per assurdo, supponiamo che f non sia unif. continua.

Si tratta di negare che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \forall y \in A \text{ si ha } |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

La negazione è

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in A \exists y \in A \text{ t.c. } |x-y| \leq \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

Dipendono da δ e ε_0

Gioco questa con $\delta = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Trovo x_n e y_n tali che

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{ma} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

Poiché A è compatto, esiste s.succ. x_{n_k} che converge ad un certo $x_\infty \in A$, cioè $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

Dico che $y_{n_k} \rightarrow x_\infty$. Basta infatti osservare che

$$\boxed{x_{n_k} - \frac{1}{n_k}} \leq \underbrace{y_{m_k}}_{x_{\infty}} \leq \boxed{x_{n_k} + \frac{1}{n_k}}$$

$\downarrow$ x_{∞} $\downarrow$ x_{∞} $\downarrow$ x_{∞}

perché $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$

per carabinieri

Ma allora

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{m_k})| \geq \varepsilon_0$$

→ uso che f è continua

$$0 = |f(x_{\infty}) - f(x_{\infty})| \geq \varepsilon_0$$

e questo è assurdo.

— 0 — 0 —

Esempio di utilizzo: integrabilità delle funzioni continue

Proposizione Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ con questa

proprietà: se divido $[a, b]$ in sottointervalli

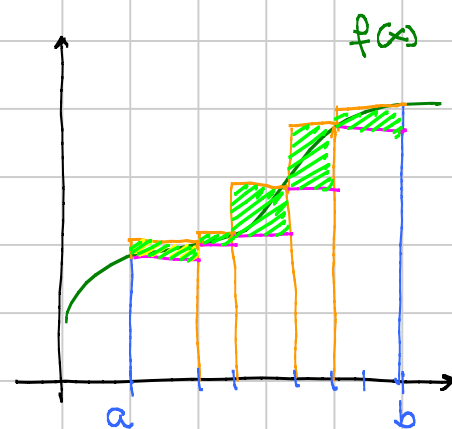
tutti di ampiezza minore di δ e poi in ogni

intervallo prendo i rettangoli che hanno

come altezza il max ed il min della

funzione, la differenza tra la somma delle

aree è minore di ε .



Dim. Per il lemma di Heine - Cantor, $f(x)$ risulta unif. continua in A . Fissato ε , considero il corrispondente δ nella definizione di unif. continua. Sia $I_1, I_2, \dots, I_k$ i sottointervalli, e siano M_k e m_k il max ed il min di $f(x)$ in I_k (esistono per Weierstrass). Ora M_k e m_k sono valori assunti in pti di I_k , che quindi distano meno di δ , quindi $M_k - m_k \leq \varepsilon$.

Quindi

$$\begin{aligned}
 \text{Area rett. sopra} - \text{Area rett. sotto} &= \sum_{i=1}^k \underbrace{(M_k - m_k)}_{\leq \varepsilon} \text{lung}(I_k) \\
 &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^k \text{lung}(I_k) \\
 &= \varepsilon (b-a).
 \end{aligned}$$

Oss. Se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. ottengo $\text{Area} \leq \varepsilon (b-a)$, allora
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. ottengo $\text{Area} \leq \varepsilon$

Basta prendere $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$ e considerare il δ' corrispondente ad ε' .

Estensione della proposizione Ho in realtà dimostrato un enunciato più generale: se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. se divido $[a, b]$ in sottointervalli tutti di ampiezza $\leq \delta$, e in ogni intervallo scelgo un pto a caso e faccio il rettangolo con quella altezza, ottengo una somma che differisce meno di ε da $\int_a^b f(x) dx$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^k f(x_k) \text{lunghezza}(I_k) \right| \leq \varepsilon$$

$\uparrow$
p.to a caso in I_k

Conseguenza pratica: metodo per calcolare in maniera approssimata il valore di un integrale, sostituendolo con una somma finita.

Per avere una stima dell'errore, serve conoscere la relazione tra δ ed ε .

Def. (Modulo di continuità) Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Si definisce modulo di continuità della funzione, definita per $r > 0$

$$\omega(r) := \sup \{ |f(x) - f(y)| : x \in A, y \in A, |x - y| \leq r \}$$

Oss. Dalla definizione segue subito che $\lim_{r \rightarrow 0^+} \omega(r) = 0$ se f è unif. cont.

Inoltre

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|) \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A.$$

ω dice quanto sono vicini $f(x)$ ed $f(y)$ posto che x e y sono vicini.