SSSUP 2013 — LEZIONE 06

Titolo nota 05/02/2013

Dim. B-W via limsup / liminf

Supponiamo che A sia limitato, quindi $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $A \subseteq [-M, M]$.
Sia x_n una successione a valori in A.
Sia $L = \limsup x_n$. Chiaramente $L \in [-M, M]$.
Poichè limsup = max lim, di sicuro esiste una s.succ. $x_{n_k} \to L$.
Infine $L \in A$ perchè A è chiuso.
Stessa cosa si poteva fare con il liminf.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$. Allora sono fatti equivalenti

(i) $A = \bar{A}$ (cioè A è chiuso),

(ii) ogni successione a valori in A, se converge, converge ad un elemento di A.

— o — o —

<u>Proposizione</u> Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.
Allora i seguenti fatti sono equivalenti

(i) $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$,

(ii) per ogni successione $x_n \to x_0$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

Dim. Analoga al caso precedente

(i) ⇒ (ii) Per la proprietà liminf = min lim si ha che

$$\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) \geq \liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

liminf = lim di opportuna s.succ.   liminf = min lim   ipotesi (i)

(ii) ⇒ (i) Basta osservare che $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) =$ liminf di opportuna succ.

$\boxed{\text{Def.}}$ Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice SEMICONTINUA INFERIORMENTE in x_0 (S.C.I.) se

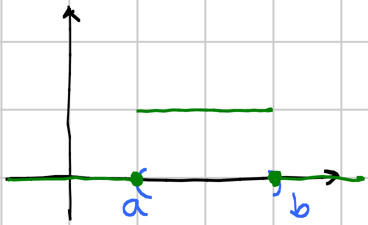
$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

o l'altro fatto equivalente.
Si dice che f è S.C.I. in A se è S.C.I. in ogni $x_0 \in A$.

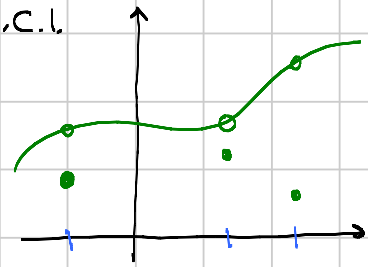
Detto brutalmente: al limite $f(x)$ può solo "crollare".

Esempi Sia $A = \mathbb{R}$.
① Tutte le funzioni continue sono S.C.I.
② La funzione caratteristica di un intervallo aperto (o aperto qualunque)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (a,b) \\ 0 & \text{se } x \notin (a,b) \end{cases}$$



③ Prendendo una funzione continua, ed "abbassandola" in un numero finito di p.ti, si ottiene una funzione S.C.I.



④
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ -12 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è S.C.I. (idem con -12 sostituito con qualunque $a \leq -1$).

Oss. In maniera analoga si definiscono le funzioni S.C.S. (semicontinue superiormente) richiedendo

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

Teorema (Weierstrass per funzioni semicontinue) Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che
(i) A è compatto,
(ii) f è s.c.i. in A.
Allora esiste per forza $\min\{f(x) : x \in A\}$.

Un enunciato analogo vale con max e s.c.s.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $I = \inf\{f(x) : x \in A\}$. Come prima esiste $\underset{f(A)}{\underset{\uparrow}{b_n}} \to I$

quindi esiste x_n in A tale che $f(x_n) = b_n \to I$.
Per compattezza esiste una s.succ. convergente in A: $x_{n_k} \to x_\infty \in A$.
Ma allora

$$I = \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$$

$$= \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) \qquad \text{(limite succ. = limite s.succ.)}$$

$$= \liminf_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) \qquad \text{(se c'è il lim., pure il liminf è uguale)}$$

$$\geq f(x_\infty) \qquad \text{(uso che } f \text{ è s.c.i.)}$$

$$\geq I \qquad \text{(perché } I \text{ è l'inf. di } f(x) \text{ al variare di } x \in A\text{).}$$

Essendo uguali il 1° e l'ultimo, sono tutte uguaglianze.
In particolare

$$f(x_\infty) = I = \inf\{f(x) : x \in A\} = \min\{f(x) : x \in A\}.$$

Esercizio ① rifare il discorso per il max
② mostrare che per funzioni s.c.i. il max non è obbligato ad esistere.

Teorema (Weierstrass generalizzato) Sia $f: A \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) f è S.C.I. in A,
(ii) esiste un sottolivello compatto, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.
l'insieme

$$\{x \in A : f(x) \leq M\}$$

è compatto e non vuoto.
Allora esiste per forza $\min\{f(x) : x \in A\}$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Chiamo K il sottolivello. Pongo

$$m = \min\{f(x) : x \in K\}.$$

Questo esiste per W. classico (occorre osservare che la restrizione di f a K è ancora S.C.I.). Dico che $m = \min\{f(x) : x \in A\}$.
Infatti
→ se $x \in K$, allora $f(x) \geq m$
→ se $x \in A \setminus K$, allora $f(x) \geq M \geq m$...
Completare i dettagli.

—o—o—

Oss. Se f è S.C.I., allora i sottolivelli $\{x \in A : f(x) \leq M\}$ sono tutti chiusi. Quindi per avere la compattezza basta verificare la limitatezza.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo una qualunque successione $a_n \to a_\infty$ con $a_n \in$ sottolivello per ogni $n \in \mathbb{N}$. Voglio dim. che $a_\infty \in$ sottolivello, cioè che $f(a_\infty) \leq M$. D'altra parte

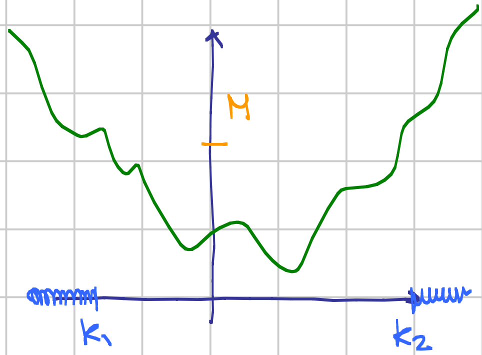
$$f(a_\infty) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S.C.I.}}}{\leq} \liminf_{n \to +\infty} f(a_n) \underset{\uparrow}{\leq} M$$

perché $f(a_n) \leq M$ in quanto $a_n \in$ sottolivello.

—o—o—

Corollario Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è s.c.i. e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Allora esiste per forza $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.



$\boxed{\text{Dim.}}$ I sottolivelli sono TUTTI limitati

Sottolivello $\subseteq [k_1, k_2]$

Osservazione Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e s.c.i., basta molto poco per l'esistenza del minimo. Basta un solo sottolivello limitato, il che segue ad esempio se esiste un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0) < \liminf_{x \to +\infty} f(x)$$

$$f(x_0) < \liminf_{x \to -\infty} f(x)$$

[Esercizio: visualizzare e dim. l'enunciato]

— o — o —