SSSUP 2013 — LEZIONE 05

Titolo nota 05/02/2013

Compattezza, completezza e teo. di Weierstrass

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $A \neq \emptyset$.
Si dice che A è $\boxed{\text{COMPATTO}}$ (per successioni) se per ogni successione a_n tale che $a_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una sottosuccessione a_{n_k} ed esiste $a_\infty \in A$ tale che $a_{n_k} \to a_\infty$.
Detto altrimenti: ogni succ. a valori in A ammette almeno una sottosuccessione convergente ad un elemento di A.

Esempi
- $A = [0, +\infty)$ non è compatto perché $a_n = n$ non ha sottosucc convergenti ad elementi A.
- $A = (0,1)$ non è compatto perché $a_n = \frac{1}{n}$ non ha sottosucc conv. ad elementi di A.

Teorema 1 (BOLZANO-WEIERSTRASS) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto è compatto se e solo se A è limitato e chiuso.

Teorema 2 (WEIERSTRASS) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $A \neq 0$ e sia
$$f : A \to \mathbb{R}.$$
Supponiamo che
(i) f è continua in A,
(ii) A è compatto.
Allora esistono
$$\left.\begin{array}{l} \max\{f(x) : x \in A\} \\ \min\{f(x) : x \in A\} \end{array}\right\}$$
massima e minima quota raggiunta da $f(x)$ quando x varia in A.

Notazioni Non confondere massimo e p.ti di massimo
minimo e p.ti di minimo

Lemma Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.
Allora esiste una successione b_n di elementi di B t.c. $b_n \to \inf B$
ed " " " " " " " " " $b_n \to \sup B$.

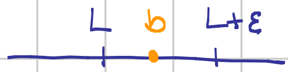
$\boxed{\text{Dim.}}$ (Nel caso dell' inf.)

$\boxed{\text{Caso 1: } \inf B = -\infty}$ Questo equivale a dire che

$$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists b \in B \quad \text{t.c.} \quad b \leq M.$$

Uso questa con $M = -n$ $(n \in \mathbb{N})$ e ottengo $b_n \in B$ t.c. $b_n \leq -n$.
È evidente che $b_n \to -\infty$

$\boxed{\text{Caso 2: } \inf B = L \in \mathbb{R}}$ Questo equivale a dire che



(i) $b \geq L \quad \forall b \in B$
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists b \leq L + \varepsilon$
Uso questa con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ e ottengo $b_n \in B$ tale che

$$L \leq b_n \leq L + \frac{1}{n}.$$

È evidente che $b_n \to L$.

— o — o —

Proposizione Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.
Allora i seguenti fatti sono equivalenti
(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap A$,
(iii) per ogni successione x_n tale che $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to x_0$ si ha che $f(x_n) \to f(x_0)$
(continuità per successioni)

Def. La funzione f si dice continua in x_0 se verifica uno qualunque dei 3 fatti equivalenti.
La funzione f si dice continua in A se è continua in ogni p.to $x_0 \in A$.

$\boxed{\text{Dim proposizione}}$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii) è la definizione di limite.

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}}$ Prendo una qualunque successione x_n di el. di A t.c. $x_n \to x_0$. Voglio dim. che $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$, cioè che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $|f(x_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ definitivamente.
Considero il $\delta > 0$ dato dall'ipotesi (ii). Poiché $x_n \to x_0$, definitivamente avremo che $|x_n - x_0| \leq \delta$, cioè $x_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap A$.
Per il p.to (ii) questo implica che $|f(x_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Procediamo per assurdo, supponendo che (ii) sia falsa.
Riscrivo (ii)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap A \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Se (ii) è falsa, allora è vero che

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap A \quad |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon_0$$

La uso con $\delta = \frac{1}{n}$. Ottengo almeno un $x_n \in [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}] \cap A$ tale che $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon_0$.
Ho così ottenuto una successione x_n di elementi di A tali che $x_n \to x_0$ e $f(x_n)$ NON tende a $f(x_0)$ perché dista sempre più di ε_0.
L'esistenza di tale succ. x_n contraddice l'ipotesi (iii).

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. teorema 2}}$ Dimostriamo che esiste il minimo (per il max è analogo). Considero l'insieme

$$B = \{ f(x) : x \in A \} \qquad (= f(A) = \text{immagine di } f)$$

Di sicuro esiste $I = \inf B$ $(\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$.
Grazie al lemma esiste una successione b_n di elementi di B tale che $b_n \to I$. Per definizione di B, questo vuol dire che esiste una successione x_n di elementi di A tale che $b_n = f(x_n)$.
Poiché A è compatto, esiste una sottosuccessione x_{n_k} tale che $x_{n_k} \longrightarrow x_\infty \in A$.
Ora abbiamo che

$$I = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

$$= \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) \quad \text{(limite s.succ. = lim. succ.)}$$

$$= f(x_\infty)$$

Nell'ultimo passaggio ho usato che f è continua, quindi è continua per successioni.

Ora so che $I = f(\text{qualcosa})$, quindi $I \in B$, quindi $I = \min B$ (e x_∞ è uno dei p.ti di minimo per f in A).

$\boxed{\text{Dim. Teorema 1}}$ Parte facile: se A non è limitato o A non è chiuso, è facile vedere che non è compatto.

Supponiamo quindi che A sia chiuso e limitato, quindi in particolare esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq [-M, M]$.

Sia x_n una qualunque successione. Voglio trovare una s.succ. convergente

Definisco

$$C = \{ c \in \mathbb{R} : x_n \geq c \text{ per infiniti valori di } n \}.$$

Fatti semplici:

→ $C \neq \emptyset$ (contiene almeno $-M$),

→ C non contiene roba più grande di M,

→ C è una semiretta sinistra (se contiene un valore, contiene anche tutti i precedenti).

Sia $L = \underbrace{\sup C}_{\in \mathbb{R}}$. Dico che esiste $x_{n_k} \to L$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ ho che

→ frequentemente $x_n \geq L - \varepsilon$

→ definitivamente $x_n \leq L + \varepsilon$.

Da qui in poi è la solita storia:

- $\varepsilon = 1$ e trovo $L-1 \leq x_{n_1} \leq L+1$
- $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e trovo $n_2 > n_1$ t.c. $L - \frac{1}{2} \leq x_{n_2} \leq L + \frac{1}{2}$

$\vdots$

- $\varepsilon = \frac{1}{k}$ e trovo $n_k > n_{k-1}$ t.c. $L - \frac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq L + \frac{1}{k}$

Ho così ottenuto la succ. x_{n_k} desiderata.

Poichè $x_{n_k} \to L$ e A è chiuso, chiaramente $L \in A$.

— o — o —