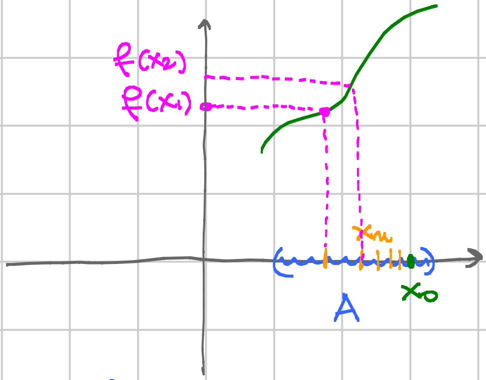
SSSUP 2013 — LEZIONE 04

Titolo nota 29/01/2013

LIMSUP DI FUNZIONI E SUCCESSIONI

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per A,
$x_n \to x_0$ una successione con $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Posso considerare la successione $f(x_n)$.
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora $f(x_n) \to \ell$
(stesso ℓ)



Brutalmente: $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

pongo $x = x_n$.
Quando $n \to +\infty$, ho che $x \to x_0$

Achtung! Tutto questo vale solo se il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste, altrimenti in generale non è vero.

Teorema 1 Nelle stesse ipotesi di sopra si ha che

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \leq \limsup_{n \to +\infty} f(x_n) \leq \limsup_{x \to x_0} f(x)$$

Banale

Teorema 2 Dati $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A, allora esiste una successione $x_n \to x_0$ t.c.

(i) $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $x_n \neq x_0$ " " "

(iii) $f(x_n) \to \limsup_{x \to x_0} f(x)$

Teorema 1 + Teorema 2 dicono che il limsup è maxlim, cioè il massimo limite possibile di $f(x_n)$ quando $x_n \to x_0$

$\boxed{\text{Dim. teorema 2}}$ Devo trovare una succ. $x_n \to x_0$ che verifica (i), (ii), (iii).

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $\limsup_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ uso la definizione di limsup con $r = \frac{1}{n}$. Ottengo che

$$\sup \{ f(x) : x \in [A \cap (x_0 - \tfrac{1}{n}, x_0 + \tfrac{1}{n})] \setminus \{x_0\} \} = +\infty$$

Questo in particolare implica che esiste $x_n \in [A \cap (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})] \setminus \{x_0\}$ tale che $f(x_n) \geq n$.

È evidente che la successione x_n verifica (i), (ii), (iii) e $x_n \to x_0$.

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\limsup_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Questo vuol dire che

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $\exists r > 0$ t.c. $f(x) \leq L + \varepsilon$ $\forall x \in [A \cap (x_0 - r, x_0 + r)] \setminus \{x_0\}$

$\forall r > 0$ si ha $f(x) \geq L - \varepsilon$ per almeno un $x \in$

Gioco questa definizione con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $r = \frac{1}{n}$.

Trovo quindi un punto

$$x_n \in [A \cap (x_0 - \tfrac{1}{n}, x_0 + \tfrac{1}{n})] \setminus \{x_0\}$$

tale che

$$f(x_n) \geq L - \frac{1}{n}$$

Questa successione x_n verifica $x_n \to x_0$, (i), (ii), (iii).

Infatti si ha subito che

$$\limsup_{n \to +\infty} f(x_n) \geq \limsup_{n \to +\infty} L - \frac{1}{n} = L$$

e vale la disuguaglianza opposta per il teorema 1. Questo si dimostra in una riga:

se x_n è abbastanza vicino ad x_0, allora $f(x_n) \leq L + \varepsilon$

— o — o —

<u>Esercizio</u> Fare il caso 3 in cui $L = -\infty$

Fare il tutto per il liminf.

— o — o —

Hôpital con liminf e limsup "Enunciato molto poco preciso"

Supponiamo che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ sia una forma del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Allora:

$$\liminf_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

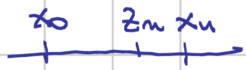
__Corollario__ Hôpital classico quando i 2 laterali sono uguali.

[__Dim.__ Basta dimostrare il $\leq$ a destra. Pongo

$L = \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Per la caratterizzazione so che esiste $x_n \to x_0$ tale che

$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$. Adesso procedo come nella dim. classica (nel caso $\frac{0}{0}$)

Applico Cauchy in $[x_0, x_n]$ e ottengo che



$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - \overset{0}{\overset{\parallel}{f(x_0)}}}{g(x_n) - \underset{0}{\underset{\parallel}{g(x_0)}}} = \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)}$$

È evidente che $z_n \to x_0$ e inoltre

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)} \leq \limsup_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

uso che il limsup è max lim.

— o — o —

__Osservazione__ Per avere il teo. dell'Hôpital serve che f sia definita in tutto un intervallo che ha x_0 come estremo.

NON BASTA che x_0 sia un p.to di accumulazione.

— o — o —

Esercizio $\limsup_{x \to 0^+} (3+x^2)\cos\frac{1}{x}$ e liminf stessa cosa

Operativamente si fanno 2 cose:

→ stima dall'alto

→ successione dal basso

Stima dall'alto $(3+x^2)\cos\frac{1}{x} \leq 3+x^2$ da cui

$$\limsup_{x \to 0^+} (3+x^2)\cos\frac{1}{x} \leq \limsup_{x \to 0^+} (3+x^2) = \lim_{x \to 0^+} (3+x^2) = 3$$

Successione dal basso Per dimostrare che $\limsup_{x \to 0^+} f(x) \geq 3$

basta trovare una successione $x_n \to 0^+$ tale che $f(x_n) \to 3$.

[La scelgo in modo tale che $\cos\frac{1}{x_n} = 1$, cioè $x_n = \frac{1}{2\pi n}$]

Pongo $x_n = \frac{1}{2\pi n}$. Osservo che $x_n \to 0^+$ e

$$f(x_n) = \left(3+\frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)\cos(2\pi n) = \left(3+\frac{1}{---}\right) \to 3$$

Per il liminf la strategia è simmetrica:

→ stima dal basso

→ successione dall'alto

$$(3+x^2)\cos\frac{1}{x} \geq -(3+x^2) \qquad \text{stima dal basso}$$

$$x_n = \frac{1}{2\pi n+\pi} \quad \text{in modo che } \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = -1 \qquad \text{(succ.)}$$