SSSUP 2013 — LEZIONE 03

Titolo nota 29/01/2013

<u>Liminf e limsup di successioni</u> Sia a_n una successione

$\boxed{1}$ Sono fatti equivalenti

(1.1) a_n <u>non</u> è limitata superiormente

(1.2) $\limsup a_n = +\infty$

(1.3) $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ frequentemente

(1.4) esiste sottosuccessione $a_{n_k} \to +\infty$ (possiamo anche supporre che a_{n_k} sia strett. crescente: basta fare in modo che $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k} + k$)

$\boxed{2}$ Sono fatti equivalenti

(2.1) $\limsup a_n = -\infty$

(2.2) $\lim a_n = -\infty$

(2.3) $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \leq M$ definitivamente

$\boxed{3}$ Sono equivalenti dato $L \in \mathbb{R}$

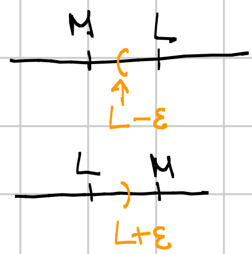
(3.1) $\limsup a_n = L$

(3.2) $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente

$a_n \geq L - \varepsilon$ frequentemente

(3.3) esiste sottosuccessione $a_{n_k} \to L$ e ogni altra s.succ., se ha limite, ha limite $\leq L$ ($L = \max \lim a_n$)

(3.4) $L = \lim\limits_{k \to +\infty} \sup \{ a_n : n \geq k \}$



(3.5) $L = \inf \{ M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \text{ definitivamente} \}$

(3.6) $L = \sup \{ M \in \mathbb{R} : a_n \geq M \text{ frequentemente} \}$

<u>Esercizio</u> Enunciare e dimostrare lo stesso quadro per il LIMINF.

— o — o —

RICHIAMI DI TOPOLOGIA

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$

Def. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice
- interno ad A se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq A$,
- aderente ad A se $\forall\, \varepsilon > 0$ si ha che $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$,
- che sta sul bordo di A se $\forall\, \varepsilon > 0$ si ha che $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$,
  (ogni intorno di x_0 tocca A ed il complem.) $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$,
- isolato in A se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A = \{x_0\}$,
- di accumulazione per A se $\forall\, \varepsilon > 0$ si ha che $[(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$
  (ogni intorno di x_0 interseca A in un p.to $\neq x_0$)

Def. Sia A come sopra. Si pone
- $\mathring{A} = \mathrm{Int}(A) =$ parte interna di A = insieme dei p.ti interni ad A,
- $\overline{A} = \mathrm{Clos}(A) =$ chiusura di A = insieme dei p.ti aderenti ad A,
- $\partial A =$ frontiera di A = insieme dei punti del bordo di A,
- $\mathrm{Isol}(A)$ = insieme dei punti isolati di A,
- $D(A)$ = derivato di A = insieme dei punti di accumulazione

Semplici proprietà di queste nozioni

① $\mathrm{Int}(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{Clos}(A)$ [trovare esempio in cui sono distinti]

② $\partial A = \mathrm{Clos}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$

③ $D(A) = \mathrm{Clos}(A) \setminus \mathrm{Isol}(A)$

④ $D(A) \cap \mathrm{Isol}(A) = \emptyset$

Esercizio Scrivere e dimostrare le relazioni tra
$\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Int}(B)$, $\mathrm{Int}(A \cup B)$, $\mathrm{Int}(A \cap B)$
$\mathrm{Clos}(A)$, $\mathrm{Clos}(B)$, $\mathrm{Clos}(A \cup B)$, $\mathrm{Clos}(A \cap B)$
Vedere cosa si salva se invece di 2 insiemi ce ne sono infiniti.

Esercizio ① Trovare A t.c. $A, \mathring{A}, \mathring{\overline{A}}, \mathring{\overline{\mathring{A}}}, \overline{A}, \overline{\mathring{A}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}$ sono 7 diversi

② Dim. che non si generano ulteriori oggetti nuovi

Def. Il solito insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice

- **aperto** se $A = \text{Int}(A)$,
- **chiuso** se $A = \text{Clos}(A)$

Esercizio Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha che

A è aperto $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R} \setminus A$ è chiuso

A è chiuso $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R} \setminus A$ è aperto

Esercizio Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Esiste una successione a_n a valori in A ($a_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$) t.c. $a_n \to x_0$ se e solo se $x_0 \in \bar{A}$.
Esiste una successione a_n a valori in A t.c. $a_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to x_0$ se e solo se x_0 è di accumulazione per A ($x_0 \in D(A)$).

[Dim. del 1°: supponiamo $x_0 \in \bar{A}$. Uso definizione di p.to aderente con $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Ottengo che $\exists\, a_k \in A \cap (x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k})$.
È ovvio che la succ. a_k è a valori in A e tende a x_0.
Viceversa: supponiamo che esista $a_n \to x_0$ con $a_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Voglio dim. che $x_0 \in \bar{A}$. Fisso $\varepsilon > 0$ qualunque. L'intervallo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ contiene a_n definitivamente, quindi contiene almeno un elemento di A (non è detto che ne contenga infiniti perché gli a_n potrebbero anche essere tutti uguali).]

Esercizio Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, trovare per quali p.ti $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste una successione a_n, fatta da elementi di A tutti distinti, tale che $a_n \to x_0$

— o — o —

Data una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$, ha senso fare il limite (e anche liminf / limsup) di $f(x)$ per $x \to x_0$ se

① $x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per A

② $x_0 = +\infty$ se A non è limitato superiormente

③ $x_0 = -\infty$ " " " " " inferiormente

LIMINF e LIMSUP di funzioni

Caso $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumul. per A

__Def.__ Sia $f: A \to \mathbb{R}$

1. Se $\forall r > 0$ si ha che $\sup\{f(x) : x \in [A \cap (x_0 - r, x_0 + r)] \setminus \{x_0\}\} = +\infty$ si dice che

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

2. Altrimenti si pone

$$S_r := \sup\{f(x) : x \in [A \cap (x_0 - r, x_0 + r)] \setminus \{x_0\}\}$$

è un numero, almeno se r è piccolo

Si osserva che $r_1 < r_2 \Rightarrow S_{r_1} \leq S_{r_2}$

dunque esiste

$$L := \lim_{r \to 0^+} S_r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

e si pone

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = L$$

La definizione di liminf è del tutto analoga.

I casi in cui $x_0 \to +\infty$ e $x_0 \to -\infty$ sono pure analoghi, basta cambiare opportunamente (in modo ovvio) l'insieme su cui si fa il sup / inf.

— o — o —