SSSUP 2013 — LEZIONE 02

Titolo nota 28/01/2013

Liminf e limsup della somma

$$\limsup_{n\to+\infty} (a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n$$

$$\liminf_{n\to+\infty} (a_n+b_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} a_n + \liminf_{n\to+\infty} b_n$$

Osservazione Le disuguaglianze possono essere strette

$a_n = +1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots$

$b_n = -1, +1, -1, +1, \dots$

Esercizio Trovare un esempio in cui i termini a dx e sx delle due formule sono 4 numeri distinti.

Esercizio Enunciare e dim. teo. per liminf / limsup di $(-a_n)$. Provare a vedere che succede per $a_n \cdot b_n$

Dim. teo. somma Segue o dalla caratterizzazione con gli ε o dalla definizione dopo aver osservato che

$$S_k^{a+b} \leq S_k^a + S_k^b$$

la quale è una proprietà del sup.

— o — o —

Esempio Calcolare liminf e limsup di $a_n = \underbrace{(-1)^n}_{\text{oscilla tra } -1 \text{ e } 1} + \underbrace{\boxed{\frac{n+3}{n+5}}}_{1}$

Quindi $\liminf_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 2$.

— o — o —

$\boxed{\text{LIMSUP E MAXLIM}}$ (Caratterizzazione del limsup mediante sottosuccessioni)

Sia $L = \limsup_{n \to +\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

① esiste sottosuccessione $a_{n_k} \to L$

② già sappiamo che se una sottosucc. ha limite, questo è $\leq L$.

Quindi L è il MAXLIM, cioè il massimo limite possibile per una sottosucc. di a_n che ha limite.

Dim. di ①. $\boxed{\text{Caso 1}}$ $L = +\infty$. Uso caratterizzazione con gli M

- prendo $M = 1$ e trovo $n_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_1} \geq 1$ (esiste)
- prendo $M = 2$ e trovo $n_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $\boxed{a_{n_2} \geq 2}$ e $n_2 > n_1$

è vera ∞ volte, quindi n_2 esiste

- prendo $M = 3$ e trovo $n_3 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_3} \geq 3$ e $n_3 > n_2$

....

In generale, supposto di aver definito $n_1, \ldots, n_k$, cerco n_{k+1} in modo tale che $n_{k+1} > n_k$ e $a_{n_{k+1}} \geq k+1$.

È ovvio ora che $a_{n_k} \geq k$, quindi $a_{n_k} \to +\infty$.

$\boxed{\text{Caso 2: } L \in \mathbb{R}}$ Uso caratt. con gli ε

- prendo $\varepsilon = 1$ e trovo $n_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $L-1 \leq a_{n_1} \leq L+1$

vera ∞ volte   vera defin.

occhio: n_1 esiste

- prendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e trovo $n_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $n_2 > n_1$ e $L - \frac{1}{2} \leq a_{n_2} \leq L + \frac{1}{2}$

in generale, definiti $n_1, \ldots, n_k$, basta scegliere n_{k+1} in maniera tale che $n_{k+1} > n_k$ e

$$L - \frac{1}{k+1} \leq a_{n_{k+1}} \leq L + \frac{1}{k+1}$$

È ovvio che $a_{n_k} \to L$ per i carabinieri.

Nel caso 3, cioè $L = -\infty$, è immediato che tutta la successione tende a $-\infty$.

— o — o —

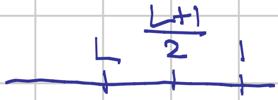
<u>Esercizio</u> Enunciare e dim. l'analogo in versione LIMINF = MINLIM

— o — o —

<u>Criterio della radice</u> Sia $a_n \geq 0$ definitivamente.

- Se $\liminf\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$, allora $a_n \to +\infty$
- Se $\limsup\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, allora $a_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim.}}$ (del secondo caso)



Definitivamente abbiamo che $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{L+1}{2}$, ma allora

Hp

$$\boxed{0} \leq a_n \leq \boxed{\left(\frac{L+1}{2}\right)^n}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

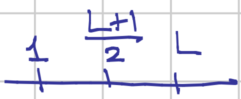
elevo formula di sopra alla n (e posso perché ...)

<u>Esercizio</u> Dimostrare il 1° caso.

<u>Criterio del rapporto</u>. Sia $a_n > 0$ definitivamente.

- Se $\liminf\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$, allora $a_n \to +\infty$
- Se $\limsup\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, allora $a_n \to 0$

<u>Dim.</u> (Caso 1) Analogamente a prima abbiamo che



$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{L+1}{2}$ definitiv. (se $L \in \mathbb{R}$)

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2013$ se $L = +\infty$

Quindi esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{L+1}{2} \quad \forall n \geq n_0$

Ma allora $a_{n_0+1} \geq \frac{L+1}{2} a_{n_0}$, $a_{n_0+2} \geq \frac{L+1}{2} a_{n_0+1} \geq \left(\frac{L+1}{2}\right)^2 a_{n_0}$

da cui per induzione posso dimostrare facilmente che

$$\underbrace{a_{n_0+k}}_{\to +\infty} \geq \underbrace{\boxed{\left(\frac{L+1}{2}\right)^k}}_{\to +\infty} \underbrace{a_{n_0}}_{\text{positivo e fisso}} \qquad (\text{dim. formalmente})$$

— o — o —

<u>Esercizio</u> Fare l'altro caso.

— o — o —

$\boxed{\text{Criterio rapporto} \to \text{radice}}$ Sia $a_n > 0$ definitivamente. Allora

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

In particolare, se il rapporto ha limite, allora ce l'ha anche la radice e coincide con il precedente.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Poniamo $L = \limsup_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se $L = +\infty$, è banale.

Sia quindi $L \in \mathbb{R}$ (è sempre ≥ 0). Fisso $\varepsilon > 0$. Allora

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Come prima dimostro per induzione che $a_{n_0+k} \leq (L+\varepsilon)^k a_{n_0}$
che posso riscrivere come

$$a_n \leq (L+\varepsilon)^{n-n_0} \cdot a_{n_0}$$

Ma allora $$\sqrt[n]{a_n} \leq \underbrace{\boxed{(L+\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}}}}_{\to L+\varepsilon} \underbrace{\boxed{\sqrt[n]{a_{n_0}}}}_{\to 1}$$ ← va dimostrato prima a parte (con disug. di BERNOULLI)

Da questa ottengo che $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L+\varepsilon$

Essendo vero per ogni $\varepsilon>0$ ho che il limsup è in realtà $\leq L$.

— o —

Esercizi

$\boxed{1}$ Dimostrare la 1ª disuguaglianza

$\boxed{2}$ Trovare un esempio in cui i 4 numeri sono tutti diversi

$\boxed{3}$ Per chi conosce le serie di potenze, trovare una formula per il raggio di convergenza valida sempre.

— o — o —