SSSUP 2013 — LEZIONE 01

Titolo nota 28/01/2013

1. LIMINF e LIMSUP
2. COMPLETEZZA, COMPATTEZZA E TEO. WEIERSTRASS
3. UNIFORME CONTINUITÀ E MODULI DI CONTINUITÀ
4. CONVESSITÀ

Due temi principali: → SUCCESSIONI PER RICORRENZA
→ EQUAZIONI DIFFERENZIALI

— o — o — o —

LIMINF E LIMSUP DI SUCCESSIONI

Ripassino veloce Una proprietà P_n dei numeri naturali vale

→ definitivamente se vale da un certo intero in poi, cioè

$\exists\, n_0$ t.c. P_n è vera $\forall n \geq n_0$

→ frequentemente se vale per infiniti valori di $n \in \mathbb{N}$.

Sia a_n una successione. Si dice

- $a_n \to +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ definit.
- $a_n \to -\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ " " " $a_n \leq M$ "
- $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ " " " $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ "

$\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$

Se nessuna di queste accade, si dice che a_n non ha limite.

Esempi classici
$$a_n = (-1)^n$$ corretto dopo video
$$b_n = (-1)^n \cdot n^n = (-n)^n$$
$$c_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$
$$d_n = 2^{(-n)^n}$$

Idea: liminf e limsup catturano le oscillazioni di una successione.

$\boxed{\text{Def.}}$ Sia a_n una successione

- Se a_n non è limitata superiormente, allora si pone
$$\limsup_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

- Se a_n è limitata superiormente, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si definisce

$$S_k := \sup \{ a_n : n \geq k \}$$ (essendo la successione limitata, avremo che $S_k \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}$)

si osserva che $S_{k+1} \leq S_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (faccio il sup su meno roba), cioè S_k è debolmente decrescente, quindi per forza esiste

$$\lim_{k \to +\infty} S_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Si pone quindi $$\limsup_{n \to +\infty} a_n := \lim_{k \to +\infty} S_k$$

Osservazione Il limsup di una successione esiste sempre in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$\boxed{\text{Def.}}$ Sia a_n una successione.

- Se a_n non è limitata inferiormente si pone $\liminf\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

- Se a_n è limitata inferiormente si pone

$$\liminf_{n \to +\infty} a_n := \lim_{k \to +\infty} \underbrace{\inf \{ a_n : n \geq k \}}$$

I_k è una succ. deb. cresc. di reali

Esempio 1 $a_n = (-1)^n$

$S_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad S_k \to 1 = \limsup$

$I_k = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad I_k \to -1 = \liminf$

Esempio 2 $a_n = \frac{1}{n}$ $S_k = \frac{1}{k} \to 0 = \limsup$

$I_k = 0 \quad \forall k$, quindi $I_k \to 0 = \liminf$

$\boxed{\text{Caratterizzazione con gli } \varepsilon}$

① Si ha che $\limsup_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se e solo se

$\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ frequentemente

② Si ha che $\limsup_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ se e solo se

(i) $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $a_n \geq L - \varepsilon$ frequentemente

[Dim. Infatti $S_k \to L$, quindi $S_k \leq L + \varepsilon$ definitivamente, quindi tutti gli a_n con $n \geq k$ sono più piccoli di $L + \varepsilon$.
Inoltre $S_k \geq L$ $\forall k \in \mathbb{N}$ perché è deb. decr. e tende ad L, quindi trovo degli a_n con indice grande a piacere che sono $\geq L - \varepsilon$.]

③ Si ha che $\limsup_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ se e solo se

$\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \leq M$ definitivamente, cioè $a_n \to -\infty$

[Infatti fissato M abbiamo che $\exists k_0$ t.c. $S_k \leq M$ $\forall k \geq k_0$, ma allora $a_k \leq S_k \leq M$ $\forall k \geq k_0$].

Analogamente: ① $\liminf_{n \to +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}$ $a_n \leq M$ frequentemente

② $\liminf_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \iff$ (i) $\forall \varepsilon > 0$ $a_n \geq l - \varepsilon$ definitiv.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ $a_n \leq l + \varepsilon$ frequent.

③ $\liminf_{n \to +\infty} a_n = +\infty \iff \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

Teorema Sia a_n una successione. Allora $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \ell.$$

[Dim: esercizio mettendo insieme i due definitivamente nella caratterizzazione con gli ε]

Teorema $\limsup_{n\to+\infty} a_n \geq \liminf_{n\to+\infty} a_n$

[Dim: per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $I_k \leq S_k$. Passando al lim...]

Teorema Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} b_n, \qquad \limsup_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} b_n$$

[Dim. per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $\underbrace{S_k^a}_{\sup\{a_n : n \geq k\}} \leq \underbrace{S_k^b}_{\sup\{b_n : n \geq k\}}$ e $I_k^a \leq I_k^b$]

Teorema Sia a_n una successione, e sia a_{n_k} una sua sottosucc. Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{k\to+\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{k\to+\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

[Dim: basta dimostrare l'ultima, la quale segue ancora una volta dalle proprietà dei sup e dalle caratterizzazioni con gli ε]

Corollario Se a_n ha limite in $\overline{\mathbb{R}}$, allora i 2 laterali sono $=$, ma allora anche i 2 centrali sono $=$, ma allora la sottosucc. ha lo stesso limite.