$$\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Questa è l'equazione di Eulero del problema di minimo

$$\min \Big\{ \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int f u \, dx}_{F(u)} \; : \; u \equiv 0 \text{ su } \partial\Omega \Big\}$$

$$\frac{1}{t}\{F(u+tv) - F(u)\} = \frac{1}{t} \frac{1}{2} \int \{ t^2 |\nabla v|^2 + 2t < \nabla v, \nabla u > + t f v \} dx$$

$$= \frac{t}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega < \nabla v, \nabla u > + \int_\Omega f v$$

Quando $t \to 0$ ottengo

$$\int_\Omega (< \nabla v, \nabla u > + f v) = 0$$

Integro per parti: $\displaystyle\int_\Omega - v \cdot \Delta u + f v \;\; = 0 \;\; = \int_\Omega (-\Delta u + f) v = 0$

Solito lemma $\Rightarrow$ $\Delta u = f$

Più in generale se ho $F(u) = \displaystyle\int_\Omega \varphi(x, u, \overset{\xi}{\nabla u}) \, dx$

l'equazione di Eulero diventa

$$\boxed{\operatorname{div} \big(\nabla_\xi \varphi(x, u, \nabla u) \big) = \varphi_u (x, u, \nabla u)}$$

Eq. di Eulero in generale

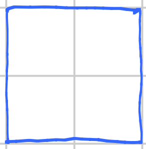
<u>Osservazione</u> Supponiamo che u sia soluzione di $\Delta u = f$ con $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Allora u è l'unico minimo del funzionale, ed in particolare la soluzione è unica. Infatti basta fare la disuguaglianza:

$$F(\underbrace{u+v}_{\text{generico competitore}}) = F(u) + \underbrace{\int_\Omega < \nabla u, \nabla v > + \int_\Omega f v}_{\int_\Omega (-\Delta u + f) \cdot v \, dx = 0} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2}_{\geq 0.}$$

Quindi l'esistenza del minimo e l'esistenza della soluzione del problema sono equivalenti.

I metodi diretti funzionano ancora (però servono spazi di Sobolev in più dimensioni...) e forniscono l'esistenza del minimo.

Come in una variabile, è ancora vero che esiste una base ortonormale di $L^2(\Omega)$ fatta da autovalori del Laplaciano, cioè da funzioni $u_n(x,y)$ t.c. $\Delta u_n(x,y) = -\lambda_n u_n(x,y)$ con $\lambda_n \to +\infty$, e opportune condizioni al bordo (cond. diverse danno basi diverse). Questa base serve poi per risolvere problemi dinamici (eq. calore, eq. onde).



<u>Esempio</u> $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$

Condizioni di Neumann. Cerco autovalori del Laplaciano, cioè $\Delta u = -\lambda u$, con $u_{|\partial\Omega} \equiv 0$.

Considero funzioni del tipo $u_{m,n}(x,y) = \sin(nx) \cdot \sin(my)$

$u_{|\partial\Omega} \equiv 0$ gratis

$$\Delta u_{m,n}(x,y) = -n^2 \sin(nx)\cdot\sin(my) - m^2 \sin(nx)\cdot\sin(my)$$
$$= -(n^2+m^2)\, u_{m,n}(x,y)$$

Questo dice che le $u_{n,m}(x,y)$ sono autovettori con. a $-(n^2+m^2)$.

Sono ortogonali tra loro?

$$\int u_{m,n}(x,y)\cdot u_{a,b}(x,y)\,dx\,dy = 0 \quad \text{se } (m,n) \neq (a,b)$$

banalmente vero e segue dall'analogo 1-dim. Dividendolo per un opportuno coeff. diventano di norma 1.

È vero che ogni $u(x,y) \in L^2(\Omega)$ si scrive come

coeff. ottenuti da prodotto scalare

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \boxed{a_{m,n}} \cdot \sin(nx)\cdot\sin(my)$$

Idea: basta saper approssimare funzioni che valgono 1 in un quadratino e 0 altrove, ma queste sono prodotto di una funzione della sola x ed una funzione della sola y.

A questo p.to posso risolvere l'eq. del calore su $\Omega = (0,\pi)\times(0,\pi)$. Scrivo

$$u(x,y,t) = \sum\sum a_{m,n}(t)\,\sin(nx)\,\sin(my)$$

Imporre $u_t = \Delta u$ diventa (stessi passaggi che in 1 variabile)

$$a_{m,n}'(t) = -(n^2+m^2)\,a_{m,n}(t)$$, da cui risolvendo

$$a_{m,n}(t) = a_{m,n}(0)\cdot e^{-(n^2+m^2)t}$$

da cui la soluzione

$$u(x,y,t) = \sum\sum \underbrace{a_{m,n}(0)}_{\text{coeff. di F. della condizione iniziale}}\cdot e^{-(n^2+m^2)t}\,\sin(nx)\cdot\sin(my)$$

coeff. di F. della condizione iniziale

$$= \frac{1}{}\int_\Omega u_0(x,y)\,\sin(nx)\cdot\sin(my)\,dx\,dy$$

fattore normalizzazione

Idem per l'eq. delle onde. Le condizioni al bordo sono inserite nella base!!

Se fosse $\Omega = (0,\pi)\times(0,\frac{\pi}{2})$
potrei usare come base ortogonale
(poi da rinormalizzare)

$$u_{n,m}(x,y) = \sin(nx)\cdot\sin(my)$$ con $n \geq 1$ intero e $m \geq 1$ intero DISPARI (per avere N. in $\frac{\pi}{2}$).

<u>Oss.</u> La serie di F. può essere utile per risolvere $\Delta u = f$.

Scrivo f in serie di F. $f(x,y) = \sum\sum f_{n,m} \underbrace{u_{n,m}(x,y)}_{\sin(nx)\cdot\sin(my)}$

A questo p.to la soluzione del problema è

$$u(x,y) = -\sum\sum \frac{f_{n,m}}{(n^2+m^2)} u_{n,m}(x,y)$$

La serie che definisce u converge a maggior ragione di quella che definisce f. Un'approssimazione di f con un numero finito di componenti fornisce una migliore approssimazione di u.

— o — o —