SSSUP 2012 — LEZIONE 29

Titolo nota 16/05/2012

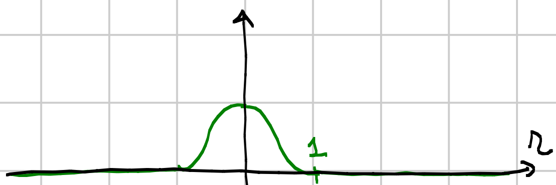
Eq. onde in dim. = 2

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} & t \geq 0, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \\ u_t(x,y,0) = u_1(x,y) \end{cases}$$

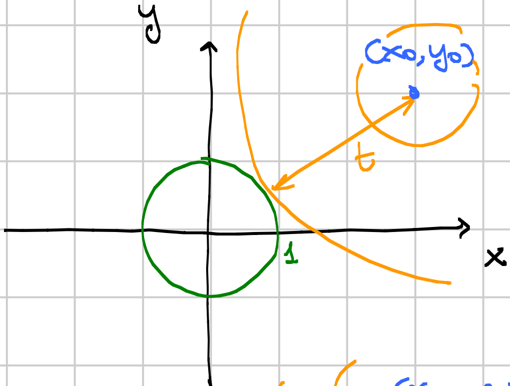
<u>Fatto</u>: esiste una formula che esprime $u(x,y,t)$ che dipende da integrali di $u_0(x,y)$ e $u_1(x,y)$ su tutta la palla con centro in (x,y) e raggio t. Questa palla è il "dominio di dipendenza" della soluzione.
In altre parole se cambio u_0 e u_1 con due funzioni $\bar{u}_0$ e $\bar{u}_1$ che coincidono con u_0 e u_1 nella palla, allora la soluzione in quel dato (x,y,t) non cambia.

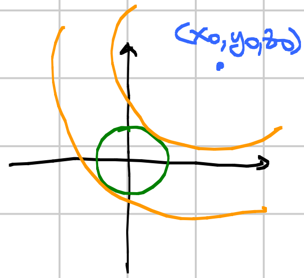
<u>Fatto</u>: se siamo in $\mathbb{R}^3$, ed in generale in $\mathbb{R}^n$ con n dispari ≥ 3, allora la formula dipende da integrali solo sul <u>bordo</u> della palla.

<u>Esempio del sasso</u> Se prendo in $\mathbb{R}^2$ $u_1(x,y) = 0$ e $u_0(x,y) =$ funzione radiale del tipo.



Se ci mettiamo in p.to (x_0, y_0) del piano, l'onda arriverà quando il dominio di dipendenza tocca la zona vicina all'origine in cui $u_0 \neq 0$. Da quel momento in poi "ci sarà sempre movimento in (x_0, y_0)". Ovviamente c'è un abbattimento man mano che il tempo passa.





In $\mathbb{R}^3$ invece l'onda inizia quando la sfera tocca e termina quando ha inglobato la zona iniziale.

CALCOLO DELLE VARIAZIONI IN PIÙ VARIABILI (in partenza)

Funzionali in cui l'ambiente sono funzioni $u: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
Caso tipico: Ω = cerchio o un quadrato in $\mathbb{R}^2$, $u(x,y)$.
Classico funzionale integrale

$$\underbrace{\int_\Omega}_{\text{integrale doppio, triplo, ecc...}} \varphi(\underbrace{x}_{\text{vettore}}, \overbrace{u(x)}^{\text{numero}}, \underbrace{\nabla u(x)}_{\text{vettore}})\, d\underbrace{x}_{\text{vettore}}$$

Esempio principale: $\quad F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy$

La condizione di Dirichlet diventa $\quad u(x,y) = u_0(x,y) \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega$

"Fisicamente": trovare come si dispone una "pelle di tamburo" fissata il bordo.

Metodo indiretto applicato al problema di Dirichlet

$$\min\Big\{ \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}_{F(u)} : u \in C^1(\overline{\Omega}),\ \underbrace{u_{|\partial\Omega}}_{u \text{ ristretta a } \partial\Omega} = \overbrace{u_0(x)}^{\text{funzione data}} \Big\}$$

Supponiamo che esista u che risolve il problema di minimo.
Prendiamo $v \in C^1(\overline{\Omega})$ con $v_{|\partial\Omega} = 0$. Calcoliamo $F(u+tv)$.
Se u è un p.to di minimo, allora questa funzione di t ha la derivata che si annulla per $t=0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big\{\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla(u+tv)|^2 - |\nabla u|^2)\, dx\Big\}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big\{\frac{1}{2}\int_\Omega (\cancel{|\nabla u|^2} + t^2|\nabla v|^2 + 2t\langle\nabla u, \nabla v\rangle - \cancel{|\nabla u|^2})\, dx$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\underbrace{t}_{\to 0}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega \langle\nabla u, \nabla v\rangle\, dx = \int_\Omega \langle\nabla u, \nabla v\rangle\, dx$$

Quindi, se u è una soluzione del problema, allora

$$\boxed{\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx = 0 \qquad \forall\, v \in C^1(\bar\Omega) \text{ t.c. } v|_{\partial\Omega} = 0}$$

Equazione di Eulero in forma integrale.

Integrazione per parti in più variabili: Gauss-Green

$$\int_\Omega f \operatorname{div} \vec{E} \, dx = -\int_\Omega \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, \underbrace{d\sigma}_{\text{integrale sul bordo}}$$

$\vec{n}$: normale esterna al bordo

$f(x,y) \qquad \vec{E}(x,y) = (E_1(x,y), E_2(x,y))$

Applico Gauss-Green con $f = v$ ed $\vec{E} = \nabla u$. Ottengo

$$\underbrace{\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx}_{\langle \vec{E}, \nabla f \rangle} = -\underbrace{\int_\Omega v \cdot \operatorname{div}(\nabla u) \, dx}_{f \cdot \operatorname{div} \vec{E}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle \, d\sigma}_{f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle}$$

$$= -\int_\Omega v \cdot \Delta u \, dx + \int_{\partial\Omega} v \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{\substack{\text{derivata direzionale} \\ \text{nella direzione} \\ \text{normale al bordo}}} d\sigma$$

Avendo preso $v \equiv 0$ su $\partial\Omega$, il termine di bordo non c'è e otteniamo

$$0 = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx = -\int_\Omega v \cdot \Delta u \, dx = 0$$

Il solito lemma fondamentale (in versione n-dimensionale) ci dice che deve essere

$\boxed{\Delta u = 0}$ Equazione di Eulero in forma differenziale

Morale: u'' in 1 variabile diventa Δu in + variabili.

Supponiamo ora di non avere condizioni di Dirichlet, dunque non siamo costretti ad usare $v \equiv 0$ su $\partial\Omega$. Si procede così.

① L'eq. di Eulero integrale dice che $\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0 \quad \forall v$

② Usando Gauss-Green e tutte le $v \equiv 0$ su $\partial\Omega$ otteniamo che $\Delta u = 0$

③ Ora l'eq. di Eulero diventa $\quad 0 = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma$

Usando il lemma fondamentale sul bordo scopriamo che deve essere

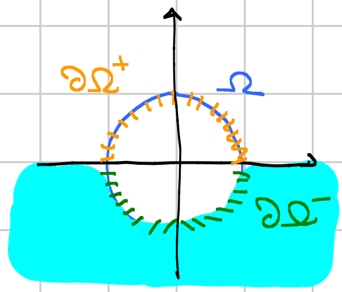
$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ su $\partial\Omega \longrightarrow$ CONDIZIONE DI NEUMANN.

— o — o —

<u>Osservazione</u> Hanno senso anche condizioni miste, cioè D su un pezzo di $\partial\Omega$ e N sul resto di $\partial\Omega$.

<u>Esempio</u>

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} & \text{in } \Omega \\ u(x,y,t) = 0 & \text{su } \partial\Omega^- \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t) = 0 & \text{su } \partial\Omega^+ \\ u(x,y,0) = 1 & \text{in } \Omega \end{cases}$$



Cocomero in acqua: temperatura iniziale uniforme $= 1$
bordo in acqua a temperatura 0
bordo in alto senza condizioni, o meglio isolato termicamente in modo che non ci sia scambio con l'esterno. (NO FLUX).