SSSUP 2012 — LEZIONE 028

Titolo nota 09/05/2012

Che forma assume un filo sospeso tra 2 pali.

Filo INESTENSIBILE = curva di lunghezza data

<u>Semplificazione 1</u>. Il filo è una curva cartesiana di lunghezza data

$$X = \{ u : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ "abbastanza regolari" t.c. } u(a) = A,\ u(b) = B$$
$$\underbrace{\int_a^b \sqrt{1+\dot{u}^2}\, dx}_{\text{lunghezza curva cartesiana.}} = L \}$$

<u>Modello</u>: il filo cerca di stare "più basso possibile", cioè la y del baricentro deve essere minima.

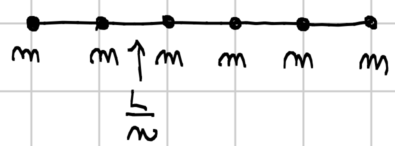
$$y_{\text{baricentro}} = \frac{1}{L} \int_\gamma y \, ds = \frac{1}{L} \int_a^b u \sqrt{1+\dot{u}^2}\, dx$$

Il problema si è ridotto a fare

$$\min \{ \underbrace{\int_a^b u \sqrt{1+\dot{u}^2}\, dx}_{F(u)} : u \in X \}$$

<u>Esercizio</u> Sostituire il filo con n palline uguali separate da una corda di lunghezza $\frac{L}{n}$

La posizione di equilibrio è quella per cui la y del baricentro è minima



Si tratta di minimizzare $F(u)$ con il vincolo al bordo + un vincolo del tipo $G(u) = L$, con

$$G(u) = \int_a^b \sqrt{1+\dot u^2}\, dx$$

<u>Moltiplicatori di Lagrange</u> In dimensione finita ci si riduce a risolvere $\nabla F = \lambda \nabla G$, cioè a trovare i p.ti stazionari di $F-\lambda G$.

Ora si tratta di risolvere l'equazione di Eulero del funzionale $F-\lambda G$

$$(F-\lambda G)(u) = \int_a^b \left(u\sqrt{1+\dot u^2} - \lambda\sqrt{1+\dot u^2}\right) dx = \int_a^b (u-\lambda)\sqrt{1+\dot u^2}\, dx$$

visto a suo tempo

Com'è fatta l'eq. di Eulero? $\int \varphi(x,u,\dot u) \rightsquigarrow (\varphi_{\dot u})' = \varphi_u$

Nel nostro caso φ non dipende da x: $\varphi(u,\dot u)$

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi_{\dot u}(u,\dot u)\right] = \varphi_u(u,\dot u)$$

$$\varphi_{\dot u u}(u,\dot u)\,\dot u + \varphi_{\dot u \dot u}(u,\dot u)\,\ddot u - \varphi_u(u,\dot u) = 0$$

Moltiplico per $\dot u$: $\underbrace{\varphi_{\dot u u}\,\dot u^2 + \varphi_{\dot u\dot u}\,\ddot u\,\dot u - \varphi_u\,\dot u}_{} = 0$

$$\frac{d}{dx}\left[\dot u\,\varphi_{\dot u}(u,\dot u) - \varphi(u,\dot u)\right] = 0$$

$$\cancel{\ddot u\,\varphi_{\dot u}} + \dot u\,\varphi_{\dot u u}\,\dot u + \dot u\,\varphi_{\dot u\dot u}\,\ddot u - \varphi_u\,\dot u - \cancel{\varphi_{\dot u}\,\ddot u}$$

Fatto generale: se nel funzionale ho $\varphi(u,\dot u)$, cioè senza x, l'Equazione di Eulero diventa

$$\boxed{\dot u\,\varphi_{\dot u} - \varphi = c}$$

Vediamo che succede con $\varphi(u,\dot{u}) = (u-\lambda)\sqrt{1+\dot{u}^2}$

$$\frac{\dot{u}\,(u-\lambda)\,\dot{u}}{\sqrt{1+\dot{u}^2}} - (u-\lambda)\sqrt{1+\dot{u}^2} = c$$

Moltiplico

$$\cancel{\dot{u}^2(u-\lambda)} - (u-\lambda)(1+\cancel{\dot{u}^2}) = c\sqrt{1+\dot{u}^2}$$

$$-(u-\lambda) = c\sqrt{1+\dot{u}^2}$$

$$(u-\lambda)^2 = c^2(1+\dot{u}^2)$$

Volendo potrei ricavare $\dot{u}$ direttamente, ma ottengo una equazione con delle radici.

In alternativa derivo tutto:

$$\cancel{2}(u-\lambda)\cancel{\dot{u}} = c^2\,\cancel{2}\cancel{\dot{u}}\,\ddot{u} \quad \rightsquigarrow \quad c^2\ddot{u} = u-\lambda$$

$$\rightsquigarrow \quad \ddot{u} = \frac{1}{c^2}u - \frac{\lambda}{c^2} \quad \to \text{equazione del 2° ordine lineare}$$

$$u(x) = a\sinh\left(\frac{x}{c}\right) + b\cosh\left(\frac{x}{c}\right) + \lambda$$

Apparentemente ho 4 parametri. Come li scelgo?
Ho 3 condizioni (2 al bordo + la lunghezza)
Se mi fossi fermato all'eq. del 1° ordine avrei avuto solo 3 parametri, quindi verificare l'eq. del 1° ordine fissa un ulteriore parametro (o meglio, basta considerare l'eq. del 1° ordine per $x=a$ (estremo dell'intervallo) e si ottiene un legame tra $u(a)$ e $\dot{u}(a)$ che si traduce in un legame tra il parametro a col il parametro b).

<u>Passaggi abusivi</u>: $\to$ uso dei moltiplicatori in dim. infinita
$\to$ uso metodo indiretto (chi dice che le soluzioni ottenute siano minimi?)

Non si può anbolare a calcolare $F(u+v)$ con u soluzione di Eulero e sperare che sia $\geq F(u)$, perchè non è detto che $u+v$ rispetti ancora il vincolo. Questo è facile solo per vincoli lineari del tipo $\int u \, dx =$ costante.

Altra possibilità: sperare che il min. esista per motivi suoi (tipo metodo diretto), poi sperare che l'eq. di Eulero abbia soluz. unica. A quel p.to la soluz. sarebbe l'unico p.to di min.

Per quanto visto

→ semicontinuità richiede la convessità dell'integranda

→ la coercività richiede la crescita quadratica di φ

Entrambe però non sono facili da verificare (la seconda è proprio falsa...) e in + c'è il vincolo.