SSSUP 2012 — LEZIONE 027

Titolo nota 09/05/2012

<u>Equazione delle onde</u>

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & t \geq 0,\ x \in (a,b) \\ + \text{condizioni al bordo} & (\text{Dir. Neu. Per.}) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

<u>Con le serie di Fourier</u>: penso $u: [0,+\infty) \to L^2((a,b))$ e la scrivo come

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{u_n(t)}_{\text{coeff.}} \underbrace{e_n}_{\text{funzioni della } x \text{ che costituiscono una base Hilbertiana di } L^2((a,b))}$$

Importante: scelgo la base Hilbertiana in modo che siano autovettori dell'operatore "fare 2 volte la primitiva con le condizioni al bordo date". In questo modo gli e_n sono pure autovettori dell'operatore $u \to u_{xx}$, quindi avremo che

$$[u(t)]_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\, \lambda_n e_n$$

λ_n: autovalore corrispondente $\sim -n^2$

$$[u(t)]_{tt} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(t)\, e_n$$

Imporre $u_{tt} = u_{xx}$ si traduce in $u_n''(t) = \lambda_n u_n(t)$ per ogni n.
Le condizioni iniziali si scrivono come

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{0n} \cdot e_n \qquad u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n} \cdot e_n$$

Devo risolvere i probl.

$$\left.\begin{cases} u_n''(t) = \lambda_n u_n(t) \\ u_n(0) = u_{0n} \\ u_n'(0) = u_{1n} \end{cases}\right\} \text{Eq. lineari } 2^\circ \text{ ordine a coeff. costanti}$$

Le soluzioni sono del tipo $u_n(t) = a_n \sin(\sqrt{-\lambda_n}\, t) + b_n \cos(\sqrt{-\lambda_n}\, t)$

La soluzione generale è quindi del tipo

$$u(t) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \left\{ a_n \sin(\sqrt{-\lambda_n}\, t) + b_n \cos(\sqrt{-\lambda_n}\, t) \right\} e_n$$

Domanda: è periodica in t? Dipende se i $\sqrt{-\lambda_n}$ sono tutti multipli di qualcosa.

Domanda 2: sono sicuro che la serie converga a t fissato? Dipende dalla serie dei quadrati dei coeff.

$$(a_n \cos + b_n \sin)^2 = \underbrace{a_n^2 \cos^2}_{a_n^2} + \underbrace{|2 a_n b_n \cos \sin|}_{a_n^2 + b_n^2} + \underbrace{b_n^2 \sin^2}_{b_n^2}$$
$$\leq$$

Se so che $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergono, allora so che converge la serie che definisce $u(t)$ per ogni $t \geq 0$.

Dovrei scrivere a_n e b_n in funzione dei dati iniziali (esercizio)

La conclusione è che $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergono se e solo se

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} u_{1n}^2 < +\infty}_{\text{meno della convergenza della serie di } u_1(x)} \qquad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}^2 < +\infty}_{\text{equivalente al fatto che la serie di } u_0(x) \text{ converge}}$$

Se voglio anche che u_{xx} abbia senso, devo imporre che converga la stessa serie con i coeff. moltiplicati per λ_n, il che si traduce in

$$\underbrace{\sum \lambda_n u_{1n}^2 < +\infty}_{H^1((a,b))} \qquad \underbrace{\sum \lambda_n^2 u_{0n}^2 < +\infty}_{H^2((a,b))}$$

In ogni caso c'è uno "sfasamento di λ_n" tra la richiesta su $u_0(x)$ e quella su $u_1(x)$.

Achtung! Contrariamente all' eq. del calore $u(t)$ non è più bella di $u(0)$, cioè non converge meglio la sua serie.

— o — o —

Soluzioni definite per $x \in \mathbb{R}$. Cerco come sono fatte tutte le $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.c. $u_{tt} = u_{xx}$.

Uso come variabili $\xi = x + t$ $\quad \eta = x - t$ $\qquad x = \frac{\xi+\eta}{2}$, $\; t = \frac{\xi-\eta}{2}$

$$u_\xi = u_x \cdot x_\xi + u_t \cdot t_\xi = \frac{1}{2} u_x + \frac{1}{2} u_t$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(u_x + u_t)_\eta = \frac{1}{2}(u_{xx} \cdot x_\eta + u_{xt} \cdot t_\eta + u_{tx} \cdot x_\eta + u_{tt} \cdot t_\eta)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{xx} \cdot \frac{1}{2} + \cancel{u_{xt}\left(-\frac{1}{2}\right)} + \cancel{u_{tx} \cdot \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} u_{tt}\right)$$

Quindi $u_{tt} = u_{xx} \iff u_{\xi\eta} = 0$

Quindi $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, quindi

$$u(x,t) = \underbrace{f(x+t)}_{\text{funzione della sola } x \text{ che trasla a sx}} + g(x-t)$$

idem a dx

Come trovare f e g? Con le condizioni iniziali

$u_0(x) = u(x, 0) = f(x) + g(x)$ $\qquad u_0'(x) = f'(x) + g'(x)$

$u_1(x) = u_t(x, 0) = f'(x) - g'(x)$

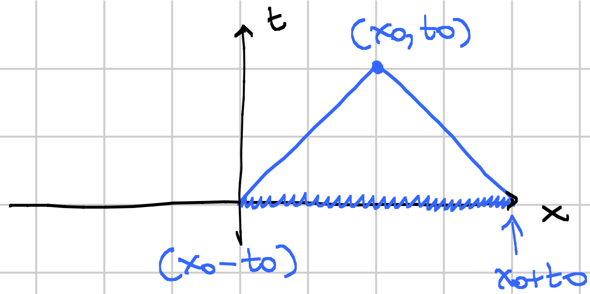
Dati $u_0(x)$ e $u_1(x)$ $\rightsquigarrow$ calcolo $f' + g'$ e $f' - g'$ $\rightsquigarrow$ calcolo f e g.

Osservazione 1 Se l'equazione è $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ la soluzione viene del tipo

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

Quindi c è la "velocità di propagazione".

Dominio di dipendenza



Quando calcolo $f(x+t)$ in un certo p.to (x_0, t_0), questo dipende solo da $f(x_0+t_0)$

Quindi $u(x_0, t_0)$ dipende solo dal valore di f in (x_0+t_0) e dal valore di g in (x_0-t_0)

Risalendo alle formule per f e g si ha che $u(x_0, t_0)$ dipende solo dai valori di $u_0(x)$ e $u_1(x)$ nell' intervallo di estremi (x_0-t_0) e (x_0+t_0). VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE FINITA

Osservazione Ci sono formule esplicite + complicate per le soluzioni dell' eq. delle onde in dimensione + alta. In generale $u(x_0, t_0)$ dipende dai dati iniziali

- in tutta la palla di centro x_0 e raggio ct se n pari
- solo sul bordo della palla se n è dispari

L'equazione diventa $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \dots$