SSSUP 2012 — LEZIONE 26

$\boxed{\text{Teorema spettrale in } \mathbb{R}^n}$ Sia V uno spazio vettoriale di dim. finita, sia $A : V \to V$ lineare, e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare in V definito positivo.

Supponiamo che A sia simmetrica rispetto al prodotto scalare, cioè

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \text{per ogni } x \in V,\ y \in V.$$

Allora V ammette una base ortonormale costituita da autovettori di A.

Situazione classica $V = \mathbb{R}^n$ con prodotto scalare classico, A dato da una matrice simmetrica. Allora A è diagonalizzabile, cioè esiste M tale che

$$M^{-1} A M = \text{matrice diagonale}$$

e le colonne di M sono vettori ortonormali.

$\boxed{\text{Teorema spettrale in dim. infinita}}$ Sia H uno spazio di Hilbert separabile (in cui esiste un sottoinsieme denso numerabile).
Sia $A : H \to H$ un'applicazione lineare simmetrica, cioè

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x \in H \quad \forall y \in H$$

Supponiamo che A sia un operatore COMPATTO (vedi dopo).
Allora H ammette una base Hilbertiana finita o numerabile costituita da autovettori di A.

<u>Def.</u> Un operatore (applicazione lineare) si dice <u>compatto</u> se manda successioni limitate in successioni relativamente compatte, cioè per ogni successione $\{v_n\} \subseteq H$ limitata esiste una s. successione v_{n_k} tale che

$$A v_{n_k} \text{ converge a qualcosa}$$

Esempio classico $H = L^2((a,b))$

Per ogni $v \in H$ definiamo Av come la primitiva di v che si annulla in a.

È chiaramente lineare. Perché è compatto?

Perché le primitive sono equi-Hölder ed equilimitate per i soliti motivi, quindi ... Ascoli-Arzelà.

Altro esempio $H = L^2((a,b))$, Av = fare 2 volte la primitiva di v con 2 condizioni al bordo (ad esempio Dirichlet, Neumann, o periodiche).

Applicazione del teorema spettrale Consideriamo l'esempio precedente, ad esempio con condizioni di Dirichlet. Chi sono gli autovalori e gli autovettori?

Se λ è autovalore e u è un autovettore corrispondente, allora

$$Au = \lambda u$$

Derivando due volte: $u = \lambda u''$, cioè $u'' = \frac{1}{\lambda} u$, cioè

se λ è negativo

$$u(x) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} x\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} x\right)$$ che si può anche scrivere volendo come

$$u(x) = A \sin\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} x + \theta\right)$$

Se ora impongo il dato nullo al bordo, trovo che non tutti i λ vanno bene. Per semplicità prendiamo $(a,b) = (0, 2\pi)$.

$\boxed{x=0}$ $c_1 = 0$

$\boxed{x=2\pi}$ $c_2 \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{|\lambda|}}\right) = 0$

Poiché $u \neq 0$ (essendo autovettore) dovrà essere $c_2 \neq 0$, quindi deve per forza essere

$$\frac{2\pi}{\sqrt{|\lambda|}} = n\pi, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} = \frac{n}{2}, \quad \text{cioè} \quad |\lambda| = \frac{4}{n^2}, \quad \text{cioè} \quad \lambda = -\frac{4}{n^2}$$

Allo stesso modo si vede che tutti i λ positivi non vanno bene
Gli autovettori corrispondenti sono proprio $\sin(n\pi)$

<u>Fatto generale</u> Le varie serie di F. considerate precedentemente sono le basi Hilbertiane che si ottengono applicando il teo. spettrale in $L^2([a,b])$ all'operatore A = doppia primitiva con opportune condizioni al bordo.
Domanda: perché l'operatore è simmetrico? Integrazione per parti (verificare)!

$\boxed{\text{Idea dim. Teo. spettrale}}$ Schema generale

Delicato

① Trovo un autovalore λ ed il corrispondente autovettore u_1
② Scrivo $V = \text{Span}(u_1) \oplus \underbrace{\text{ortogonale}}_{V'}$
③ Dimostro che A manda V' in V', quindi per restrizione

Facile

posso considerare A come operatore simmetrico $A: V' \to V'$
④ Su V' ho la base di autovettori per ipotesi induttiva.

Il punto delicato è, sia in dim. finita, sia in dimensione infinita, dimostrare che esiste almeno un autovalore.
<u>Caratterizzazione variazionale degli autovalori</u>

$$\min_{\max} \{ \langle Av, v \rangle : v \in V, \|v\| \leq 1 \}$$

Per W. max e min esistono. Sorpresa: max e min sono il + grande ed il + piccolo autovalore, ed i p.ti di max / min sono i rispettivi autovettori. Dim: esercizio di analisi 2 con i moltiplicatori di Lagrange.
In dim. infinita è la stessa cosa, solo che la palla è compatta solo debolmente, per cui bisogna usare W. rispetto alla topologia DEBOLE. Se $v_n \rightharpoonup v_\infty$, per compattezza $Av_n \to Av_\infty$, quindi $\langle Av_n, v_n \rangle \to \langle Av_\infty, v_\infty \rangle$ il che dà la continuità rispetto alla debole.