SSSUP 2012 - LEZIONE 25

Titolo nota 24/04/2012

<u>Problemi di evoluzione</u> Equazioni alle derivate parziali (PDE)

Equazione del calore: $u_t = u_{xx}$
Equazione delle onde: $u_{tt} = u_{xx}$
incognita $u(x,t)$, $x \in [a,b]$, $t \geq 0$

Problema generale:
$$\begin{cases} \text{Eq. diff.} \\ \text{condizioni al bordo (nella } x) \\ \text{condizioni iniziali (nella } t) \end{cases}$$

in numero uguale all'ordine dell'equazione in t.

<u>Esempi</u>

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t \geq 0, \quad x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{Condizioni di DIRICHLET} \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{Condizione iniziale} \end{cases}$$

$u_0(x)$: funzione data della x.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & t \geq 0, \quad x \in [0,1] \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & \text{Condizioni di NEUMANN} \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

$u_0(x)$, $u_1(x)$: funzioni date della x

Perchè la serie di Fourier aiuta?

Data $u \in L^2((0,1))$ posso scriverla come $\sum_{n=0}^{\infty} u_n e_n = u$

u_n: numeri; e_n: el. di una base Hilbertiana

Se come base Hilbertiana ho preso quella coinvolta nella serie di Fourier, ho che

$$u_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} -n^2 u_n e_n$$

con varianti a seconda che ci siano solo sin, solo cos, o entrambi

Data una funzione $u(x,t)$, definita per $x \in [0,1]$ e $t \geq 0$, la posso pensare come

$$u : [0,+\infty) \to L^2((0,1)).$$

Interpretato in serie di Fourier diventa

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{u_n(t)}\, e_n$$

funzioni $u_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

È intuitivo che sarà $\quad u_t(x,t) = u'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(t)\, e_n$

A questo punto l'equazione $u_t = u_{xx}$ diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(t)\, e_n = \sum_{n=0}^{\infty} -n^2 u_n(t)\, e_n$$

Le due serie hanno la stessa somma se e solo se hanno gli stessi coefficienti, quindi

$$u_n'(t) = -n^2 u_n(t) \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},\ t \geq 0.$$

La soluzione di queste è $\quad u_n(t) = u_n(0)\, e^{-n^2 t} \qquad \forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

dove $u_n(0)$ sono le componenti di F. del dato iniziale, cioè

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0)\, e_n.$$

Come si risolve il problema per l'equazione del calore?

- Data una cond. iniziale $u_0(x) \in L^2((0,1))$, la scrivo in serie di F. ottenendo i suoi coeff. $u_n(0)$
- Calcolo $u_n(t) = u_n(0)\, e^{-n^2 t}$
- Allora la soluzione è

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0)\, e^{-n^2 t} \cdot e_n$$

Che fine fanno le condizioni al bordo? Incidono sul tipo di serie di Fourier da utilizzare.

Condizioni classiche: → Dirichlet omogenea $u(a,t) = u(b,t) = 0$

→ Neumann omogenea $u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$

→ Periodiche $u(a,t) = u(b,t)$, $u_x(a,t) = u_x(b,t)$

$\boxed{\text{Periodiche}}$ con $(a,b) = (0, 2\pi)$. Uso la serie di Fourier classica con sia $\sin(nx)$ sia $\cos(nx)$. Questo garantisce che la soluzione rispetta le condizioni al bordo periodiche.

$\boxed{\text{Dirichlet}}$ con $(a,b) = (0,\pi)$. Uso la serie di F. con soli $\sin(nx)$ ottenuta dopo aver esteso u a $(-\pi, \pi)$ per "disparità".

$\boxed{\text{Neumann}}$ con $(a,b) = (0,\pi)$. Uso solo $\cos(nx)$

aggiunto dopo video

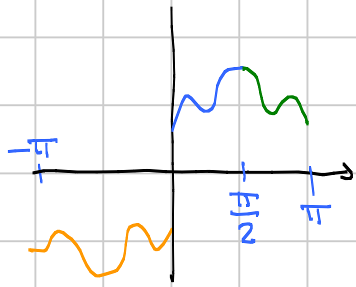
e n dispari per rispettare Neumann in $\frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{Dirichlet a sx, Neumann a dx}}$ con $(a,b) = (0, \frac{\pi}{2})$.

Uso una serie di F. con soli $\boxed{\sin(nx)}$ dopo aver esteso a $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ per "parità" e a $(-\pi, 0)$ per "disparità"

— o — o —

In che senso la condizione al bordo è soddisfatta dalla soluzione? Per parlare di valori tipo $u(a,t)$ oppure $u_x(a,t)$ servirebbe una qualche forma di continuità ...



<u>Effetto regolarizzante</u> Per $t=0$ ho che $u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0)\, e_n$ e so soltanto che

$$\sum_{n=0}^{\infty} [u_n(0)]^2 < +\infty$$

Per t positivo ho che $$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{u_n(0)\, e^{-n^2 t}}\, e_n$$

nuovi coefficienti

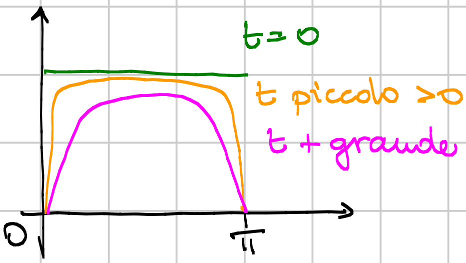
Quindi è ovvio intanto che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[u_n(0)\, e^{-n^2 t}\right]^2 < +\infty$$

ma anche
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n^k u_n(0) e^{-n^2 t} \right]^2 < +\infty \quad \text{per ogni } k$$

Per $k=1$ ottengo che $u(t) \in H^1((0,1))$ per ogni $t>0$, quindi gratis ho che $u(t)$ è continua come funzione della x, anche se $u_0(x)$ era solo L^2.
Per $k=2$ ottengo che $u(t) \in H^2((0,1))$ per ogni $t>0$, quindi $u_x \in H^1$, quindi u_x è continua come funzione della x.

<u>Osservazione</u>
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } \overset{x}{[0,\pi]} \times \overset{t}{[0,+\infty)} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x,0) = 1 & \forall x \in [0,\pi] \end{cases}$$
Parto con una distribuzione di temperatura uniforme $\equiv 1$, e vedo come evolve ponendo dato nullo al bordo.
Nota bene: la condizione iniziale ed il dato al bordo sono incoerenti



<u>Esercizio</u>: calcolare esplicitamente i coefficienti, quindi la soluzione.

<u>Nota bene</u> I coefficienti decadono molto velocemente per colpa di $e^{-n^2 t}$, quindi bastano poche componenti per approssimare bene una soluzione.

<u>Osservazione</u> "Non si può" risolvere l'eq. del calore per tempi $t \leq 0$, a meno che i coeff. iniziali $u_n(0)$ non siano molto decadenti.
Morale: se una serie converge, quando la moltiplico per $e^{-n^2 t}$ con $t < 0$ non è detto che converga.