Esistenza di basi Hilbertiane

Sia H uno spazio di Hilbert. Supponiamo che esista $D \subseteq H$ numerabile e denso (cioè per ogni $v \in H$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $w \in D$ t.c. $\|v - w\| \leq \varepsilon$).

Allora H ammette una base Hilbertiana numerabile.

(Idea della dimostrazione: solito metodo di ortonormalizzazione a partire da $D = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$).

SERIE DI FOURIER $(a,b) = (0, 2\pi)$ Considero $L^2((0,2\pi))$

Una possibile base Hilbertiana è costituita dalle funzioni

$$u_n(x) = c_n \sin(nx) \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$v_n(x) = d_n \cos(nx) \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

dove i coefficienti c_n e d_n sono scelti in maniera tale che

$$\int_0^{2\pi} [u_n(x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} [v_n(x)]^2 dx = 1$$

Fatti da controllare:

① Devono avere norma 1 : banale

② Devono essere a 2 a 2 ortogonali, cioè

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) = \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx)\, dx = 0 \qquad \text{se } m \neq n$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx)\, dx = 0 \qquad \text{per ogni } m \text{ ed } n$$

③ Ogni funzione $f(x) \in L^2((0,2\pi))$ si deve poter scrivere come

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n v_n(x)$$ (con convergenza in L^2)

[Dim.: difficile]

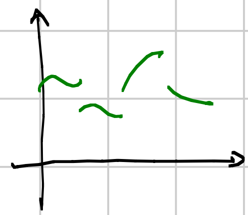
Posto che sia una base Hilbertiana, avremo che

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(x)\, u_n(x)\, dx \qquad b_n = \int_0^{2\pi} f(x)\, v_n(x)\, dx$$

$$\int_0^{2\pi} [f(x)]^2\, dx = \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n\geq 0}^{\infty} b_n^2$$

Teorema 1 Supponiamo che $f \in C^1(\mathbb{R})$ e periodica di periodo 2π. Allora la serie di Fourier di $f(x)$, cioè la serie i cui coefficienti sono dati dagli integrali di sopra, converge uniformemente ad $f(x)$ su tutto $\mathbb{R}$ (basta in $[0, 2\pi]$ + periodicità).

Teorema 0.5 Supponiamo che $f \in C^1$ a tratti e 2π-periodica (quindi può esserci un numero finito di p.ti di discontinuità per $f(x)$ e/o $f'(x)$, ma in quei p.ti esistono i limiti da dx e sx). Allora ~~$f(x)$~~ la serie di Fourier di $f(x)$ converge puntualmente

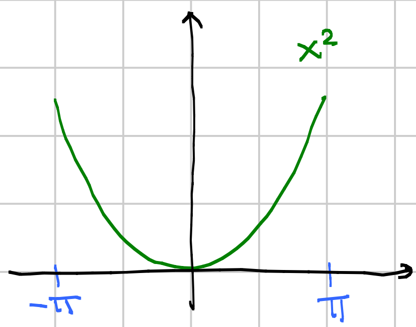


- ad $f(x)$ all'interno dei tratti
- alla media tra limite dx e sx nei p.ti di discontinuità.

— o — o —

Osservazione Se invece di $(0, 2\pi)$ ho $(0, a)$ basta riscalare tutto usando $\sin\left(n \frac{2\pi}{a} x\right)$ $\cos\left(n \frac{2\pi}{a} x\right)$

Esercizio Dimostrare che $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$



Consideriamo $f(x) = x^2$, pensata in $[-\pi, \pi]$ e ripetuta per periodicità.
Considero la sua serie di F. (di soli cos)
I coeff. li posso calcolare... È C^1 a tratti, quindi uso il Teorema 0.5. Sostituisco $x = \pi$ e viene il risultato...

<u>Esercizio bis</u> Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

— o — o —

Considero ora $L^2((0,\pi))$. Allora posso fare una base Hilbertiana fatta di soli sin o soli cos, cioè ad esempio una base del tipo

$$u_n(x) = \boxed{c_n} \sin(nx) \qquad n = 1, \dots$$

rendono le norme $= 1$.

I p.ti ① e ② sono banali. Resta il p.to ③.

Prendo una qualunque $f \in L^2((0,\pi))$.

La estendo in $(-\pi, 0)$ in modo che sia dispari.

Volendo la estendo ad $\mathbb{R}$ in modo che sia 2π-periodica.

La sviluppo come 2π-periodica usando sin e cos.

Osservo che i coeff. dei cos sono $= 0$ perché è dispari.

Osservo che la convergenza in $L^2((0,\pi))$ segue da quella in $L^2((-\pi,\pi))$, che a sua volta è equivalente a quella in $(0, 2\pi)$.

<u>Oss.</u> Se voglio fare lo stesso in $[0,T]$ devo usare $\sin(n \frac{\pi}{T} x)$

— o — o —

<u>Fatto generale</u> Se $f(x) = \sum a_n$ "$\cos(nx)$" $+ b_n$ "$\sin(nx)$"

sto molt. per il coeff. che li rende di norma 1

allora $f'(x)$, se esiste, è dato da

$$f'(x) = \sum (-n a_n) \text{"}\sin(nx)\text{"} + n b_n \text{"}\cos(nx)\text{"}$$

e la serie converge $\Longleftrightarrow \sum (n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2) < +\infty$

— o — o —

<u>Osservazione</u> Consideriamo l'applicazione $f \to f''$.

Gli autovettori sono proprio $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$