SSSUP 2012 — LEZIONE 23

Titolo nota 18/04/2012

H sp. di Hilbert, $\mathcal{B} \subseteq H$ base Hilbertiana numerabile
Allora ogni successione limitata ha una s.succ. debolmente convergente.

<u>Esempio classico</u> $\quad F(u) = \int_a^b [\dot{u}(x)]^2\,dx + \int_a^b g(u(x),x)\,dx$

Voglio dimostrare che esiste $\min\{F(u) : u \in H^1((a,b))\}$.
Supponiamo che $\boxed{g(u,x) \geq 0 \text{ sempre.}}$
Considero un sottolivello $\{u : F(u) \leq k\}$ per un certo k.
L'ipotesi su g implica che

$$\int_a^b [\dot{u}(x)]^2\,dx \leq k$$

per ogni k che ~~sta~~ nel sottolivello.
Detto meglio: prendiamo una successione $\{u_n\} \subseteq H^1((a,b))$ t.c.
$F(u_n) \longrightarrow \inf\{F(u) : u \in \ldots\}$ (successione minimizzante)
Posso dire che

$$\int_a^b [\dot{u}_n(x)]^2\,dx \leq \inf\{F(u) : u \in \ldots\} + 25$$

Quindi la successione $\dot{u}_n(x)$ ha una sottosuccessione (che non rinomino) tale che $\dot{u}_n(x) \longrightarrow v(x)$ (convergenza debole)

Visto che $\dot{u}_n(x)$ è una successione limitata in L^2, per quanto visto prec. si ha che le $u_n(x)$ sono $\frac{1}{2}$-Hölder con costante equilimitata.
Supponiamo ora che qualche ipotesi permetta di limitare i valori assunti da $u_n(x)$. Allora Ascoli-Arzelà permette di concludere che $u_n(x)$ ha una sottosuccessione che converge uniformemente ad una certa $u_\infty(x)$.

Ipotesi che permettono di limitare $u_n(x)$:

* condizione al bordo $u(a) = A$
* qualche ipotesi che dice che $g(u,x)$ è enorme quando u è enorme (tipo $g(u,x) = \sin^2 x + u^4$)

Speranza: $v(x)$ è la derivata debole di $u_\infty(x)$

<u>Dim.</u> per ogni $\Phi \in C^1([a,b])$ nulla al bordo si ha che

$$\int_a^b u_n(x) \cdot \Phi'(x)\, dx = -\int_a^b \dot{u}_n(x) \cdot \Phi(x)\, dx$$

$\downarrow$ per conv. uniforme $\qquad\qquad \downarrow$ per conv. debole

$$\int_a^b u_\infty(x) \cdot \Phi'(x)\, dx = -\int_a^b v(x) \cdot \Phi(x)\, dx$$

Questo dice che $v(x)$ è la derivata debole di $u_\infty(x)$.

Ora $u_\infty(x)$ è il candidato ad essere il p.to di minimo per F.
Basta dimostrare che $F(u_\infty) \leq \inf\{F(u) \ldots\}$.
Per questo basta che

$$F(u_\infty) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \qquad \text{(semicontinuità inferiore)}$$

$$F(u_n) = \int_a^b [\dot{u}_n(x)]^2\, dx + \int_a^b g(u_n(x), x)\, dx$$

Vediamo separatamente i 2 termini:

- Poichè $u_n(x) \to u_\infty(x)$ uniformemente, abbiamo che $g(u_n(x), x) \to g(u_\infty(x), x)$ uniformemente, e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g(u_n(x), x)\, dx = \int_a^b g(u_\infty(x), x)\, dx$$

- Poichè $\dot{u}_n(x) \longrightarrow v(x) = \dot{u}_\infty(x)$, per la semicontinuità della norma si ha pure che

$$\liminf_{n\to+\infty} \underbrace{\int_a^b |\dot{u}_n(x)|^2\,dx}_{=\|\dot{u}_n\|_{L^2}} \geq \int_a^b |\dot{u}_\infty(x)|^2\,dx$$

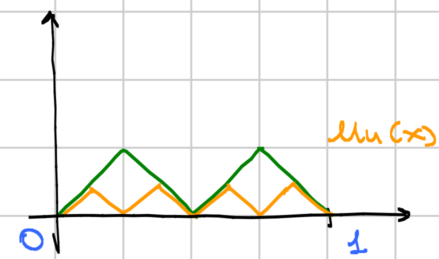
Mettendo insieme i 2 pti ottengo proprio la semicontinuità.

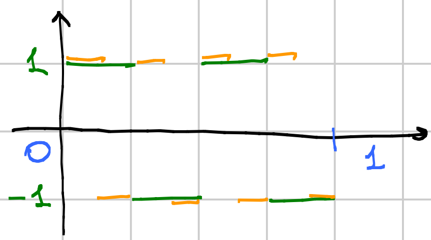
Domanda: se $u_n(x)$ avevano delle condizioni al bordo (dipende dal problema...), è vero che $u_\infty(x)$ continua a rispettarle? Sì, perché le u_n convergono uniformemente, quindi tutte le info. puntuali passano al limite.

<u>Osservazione</u> Al posto di $\int_a^b |\dot{u}(x)|^2 dx$ posso mettere $\int_a^b \varphi(\dot{u}(x))\,dx$

purché φ sia <u>convessa</u>. Questa è la condizione che garantisce la semicontinuità debole del termine con la derivata.

<u>Esempio di convergenza debole</u>





Nell'esempio:

$u_n(x) \to 0$ uniformemente

$\dot{u}_n(x)$ non convergono a 0 fortemente, poiché $\|\dot{u}_n - 0\|_{L^2} = 1$

$\dot{u}_n(x) \to 0$ debolmente, in un certo senso "mediando $+1$ e -1".

Se considero una qualunque ϕ e faccio

$\int_0^1 \dot{u}_n(x)\,\phi(x)\,dx$ questo tende a 0 per ogni $\phi \in L^2((0,1))$

- ok se ϕ è C^1 e nulla al bordo (int. per parti
- poi si usa che ogni funzione L^2 è approx con C^1 nulle al bordo.

In alternativa

- OK se ϕ è costante in un intervallo e 0 altrove,
- OK se ϕ è costante a tratti (step functions),
- ogni funzione L^2 si approx con costanti a tratti.

— o — o —

<u>Teorema generale</u> $\quad F(u) = \int_a^b \varphi(\dot{u}, u, x)\, dx$

Supponiamo che

(i) φ è continua in tutte le variabili,

(ii) φ è convessa nella variabile $\dot{u}$ per ogni scelta di (u, x)

(iii) $\varphi(\dot{u}, u, x) \geq c_1 |\dot{u}|^2 - c_2$ con $c_1 > 0$ e c_2 reale.

Allora esiste sempre

$$\min \{ F(u) : u \in H^1((a,b)), \underbrace{u(a) = A, \quad u(b) = B}_{} \}$$

possono essere sostituite da qualunque condizione che limiti le un di una successione minimizzante in almeno un p.to.

L'esempio iniziale è la dimostrazione nel caso speciale

$$\varphi(\dot{u}, u, x) = f(\dot{u}) + g(u, x)$$

convessa $\qquad$ continua