

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $p \geq 1$ reale

$$L^p(a,b) := \text{funzioni } f \text{ t.c. } \int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty$$

Spazi di Sobolev. Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

Sono fatti equivalenti i seguenti.

① Esiste $w \in L^p(a,b)$ t.c.

$$\int_a^b f(x) \cdot \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b w(x) \cdot \varphi(x) dx$$

per ogni $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e t.c. $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

② Esiste una successione di funzioni f_n di classe C^1 t.c.
 $f_n \rightarrow f$ in qualche senso forte (uniformemente, o in L^2)
 e $\|f_n'\|_{L^2} \leq \text{costante}$

③ I rapporti incrementali $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = R_h(x)$

sono tali che $R_h(x) \rightarrow \text{qualcosa}$ (debole in L^2)

④ I rapporti incrementali sono tali che $\|R_h(x)\|_{L^2} \leq \text{costante}$.

Se f verifica una qualunque delle proprietà di sopra si dice che $f \in H^1(a,b)$.

Oss. ④ e ③ sono la stessa cosa per la debole compattità delle palle in $L^2(a,b)$. Anche ② ed ① sono la stessa cosa per lo stesso motivo.

Dim. che ② implica ① Sappiamo che $f_n \rightarrow f$ forte e $|f_n'|$ sono limitate.

A meno di s.succ. avremo che $f_n' \rightarrow w$. Dico che w fa funzionare l'integrazione per parti. Infatti per ogni n ho che

$$\int_a^b f_n(x) \cdot \varphi'(x) dx = - \int_a^b f_n'(x) \cdot \varphi(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot \varphi'(x) dx = - \int_a^b w(x) \cdot \varphi(x) dx$$

$\downarrow \leftarrow$ per questa bastava che $f_n \rightarrow f$ debole $\downarrow$



Dim. che ④ implica ①

$$\int_a^b \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \varphi(x) dx = - \int_a^b f(x) \frac{\varphi(x-\varepsilon) - \varphi(x)}{-\varepsilon} dx$$

$\downarrow$ hanno norma limitata in L^2 $\downarrow$ $\varphi'(x)$ per ogni x

dunque hanno un limite debole a meno di s.succ., che chiamo w

A questo p.to

$$\text{LHS} \rightarrow \int_a^b w(x) \cdot \varphi(x) dx$$

$$\text{RHS} \rightarrow - \int_a^b f(x) \cdot \varphi'(x) dx$$

— o — o —

Fatto misterioso Se $f(x) \in H^1(a,b)$, allora " f è l'integrale della sua derivata debole", cioè per ogni $[c,d] \subset (a,b)$ si ha che

$$f(d) - f(c) = \int_c^d w(x) dx$$

Conseguenza Se $f \in H^1((a,b))$, allora f è continua, ma è $\frac{1}{2}$ Hölder con costante dipendente da $\|w\|_{L^2}$.

Dim.

$$\begin{aligned}
 |f(d) - f(c)| &= \left| \int_c^d w(x) dx \right| \\
 &= \left| \int_c^d w(x) \cdot 1 dx \right| \\
 &= |\langle w, 1 \rangle_{L^2((c,d))}| \\
 &\stackrel{\text{c.s.}}{\leq} \|w\|_{L^2((c,d))} \cdot \|1\|_{L^2((c,d))} \\
 &\leq \|w\|_{L^2((a,b))} \cdot \sqrt{|d-c|}
 \end{aligned}$$

Esempio

$$F(u) = \int_a^b (u^2 + \sin u) dx$$

$$\min \{ F(u) : u(a) = 5, u(b) = 7 \}$$

Metodo diretto Sia $I = \inf \{ F(u) : u(a) = 5, u(b) = 7, u \in H^1((a,b)) \}$

È chiaro che I non è $-\infty$. Prendo una successione $u_n \text{ t.c. } F(u_n) \rightarrow I$. Allora è facile vedere che

$$\begin{aligned}
 \int_a^b [u'_n(x)]^2 dx &\text{ sono limitati in quanto} \\
 \int_a^b [u'_n(x)]^2 dx &= F(u_n) - \int_a^b \sin(u_n) dx \leq F(u_n) + \int_a^b 1 dx \\
 &\leq I + 57 + (b-a)
 \end{aligned}$$

Per la conseguenza di prima so che le u_n sono $\frac{1}{2}$ Hölder con controllo sulla costante di Hölder uniforme in n .

Ora

(i) Le $u'_n(x)$ sono equilimitate in L^2 , dunque a meno di s.succ. convergono ad una certa w debole $u'_n \rightharpoonup w$

(ii) Sulle $u_n(x)$ uso Ascoli - Arzelà. Infatti sono

- equi $\frac{1}{2}$ -Hölder
- equilimitate in quanto $u_n(a) = \text{valore fisso}$ e poi la costante di Hölder è limitata.

A meno di s.succ. $u_n \rightarrow u_\infty$ uniformemente.

Chiaramente w_∞ sarà la derivata debole di u_∞ . La dim. è banale

$$\begin{aligned} \int_a^b u_n(x) \varphi'(x) dx &= - \int_a^b u_n'(x) \cdot \varphi(x) dx \\ \downarrow \\ \int_a^b u_\infty(x) \varphi'(x) dx &= - \int_a^b w_\infty(x) \cdot \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Ora } \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b [u_n'(x)]^2 dx + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(u_n(x)) dx$$

uso che
norma è s.c.i. $\downarrow$

$$\geq \int_a^b [w_\infty(x)]^2 dx + \int_a^b g(u_\infty(x)) dx = F(u_\infty)$$

Questo dimostra che u_∞ è un pto di minimo, dunque il minimo esiste.

Oss. ① Sul secondo addendo c'è il limite, dovuto alla convergenza uniforme.

② Sul primo addendo c'è solo il liminf, e lo avrei avuto anche se c'era una $\varphi(u)$ con φ convessa.