SSSUP 2012 – LEZIONE 21

Titolo nota 04/04/2012

$\boxed{\text{CONVERGENZA DEBOLE}}$ Obiettivo: rendere le palle compatte.

Def. Sia H un Hilbert, e sia $\{v_n\}$ una successione in H.
Si dice che v_n converge debolmente a v_∞, e si scrive

$$v_n \rightharpoonup v_\infty$$

se per ogni $v \in H$ si ha che

$$\langle v_n, v \rangle \to \langle v_\infty, v \rangle$$ (limite di numeri)

Osservazione Se $v_n \to v_\infty$ (convergenza forte, nel senso della metrica di H), allora $v_n \rightharpoonup v_\infty$.

Dim. Per ogni $v \in H$ si ha che

$$|\langle v_n, v\rangle - \langle v_\infty, v\rangle| = |\langle v_n - v_\infty, v\rangle| \overset{\text{C.S.}}{\leq} \underbrace{\boxed{\|v_n - v_\infty\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\boxed{\|v\|}}_{\text{numero fisso.}}$$

Osservazione Ci sono esempi in cui c'è convergenza debole, ma non convergenza forte. Prendiamo $H = \ell^2$ e v_n = base Hilbertiana canonica.
Questa succ. non converge forte a nulla, né converge alcuna sua s.succ. Tuttavia $e_n \rightharpoonup 0$. Motivo
Fissato un qualunque $v \in H$, devo dim. che

$$\underbrace{\langle v_n, v\rangle}_{\text{componente } n\text{-esima}} \to \langle 0, v\rangle = 0$$

di v, e queste tendono a 0 perché la serie dei loro quadrati converge.

Fatto generale difficile: se $v_n \rightharpoonup v_\infty$, allora v_n è limitata

Viceversa Ogni successione v_n limitata ammette almeno una s.succ. debolmente convergente, cioè le palle chiuse negli spazi di Hilbert sono debolmente compatte.

"Dim". Supponiamo che esista una base Hilbertiana $\{e_n\}$.
Sia $\{v_n\}$ una successione limitata in H. Devo trovare una s.succ., che chiamo ancora v_n, t.c. $\langle v_n, v \rangle \to \langle v_\infty, v \rangle \quad \forall v \in H$

$\boxed{\text{Step 1}}$ Posso trovare una s.succ. che verifica la richiesta per tutti gli elementi $\{e_i\}$ della base Hilbertiana.
Fisso e_1. Considero $\langle v_n, e_1 \rangle$: questa è una successione limitata di numeri reali, dunque ammette una s.succ. convergente ad un certo a_1.
Fisso e_2, ed estraggo dalla precedente una s.succ. t.c. $\langle v_n, e_2 \rangle \longrightarrow$ ad un certo a_2
E così via...
Il vettore $v_\infty := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ è il candidato limite debole della successione.
Commento: ho ottenuto v_∞ facendo il limite componente per componente.

$\boxed{\text{Step 2}}$ La s.succ. trovata allo step 1 e v_∞ verificano la richiesta per ogni v che sia comb. lineare finita di elementi della base Hilbertiana. Sia

$$v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k$$

$$\begin{aligned}
\langle v_n, v \rangle &= \langle v_n, c_1 e_1 + \dots + c_k e_k \rangle \\
&= c_1 \langle v_n, e_1 \rangle + \dots + c_k \langle v_n, e_k \rangle \\
&\longrightarrow c_1 a_1 + \dots + c_k a_k \\
&= c_1 \langle v_\infty, e_1 \rangle + \dots + c_k \langle v_\infty, e_k \rangle \\
&= \langle v_\infty, c_1 e_1 + \dots + c_k e_k \rangle
\end{aligned}$$

Step 3 La s.succ. trovata allo step 1 e v_∞ verificano la richiesta per ogni $v \in H$, cioè

$$\lim_{n \to +\infty} \langle v_n, v \rangle = \langle v_\infty, v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

Fisso $\varepsilon > 0$, e scelgo un w t.c. $|v - w| \le \frac{\varepsilon}{2}$ e w sia combinazione lineare finita di elementi di e_n (basta prendere un' opportuna somma parziale della serie che scrive v in termini della base...). Allora

$$\begin{aligned}
|\langle v_n, v \rangle - \langle v_\infty, v \rangle| &= |\langle v_n - v_\infty, v \rangle| \\
&= |\langle v_n - v_\infty, v - w + w \rangle| \\
&= |\langle v_n - v_\infty, v - w \rangle + \langle v_n - v_\infty, w \rangle| \\
&\le |\langle v_n - v_\infty, v - w \rangle| + \boxed{|\langle v_n - v_\infty, w \rangle|}
\end{aligned}$$

tende a 0 per lo step 2, essendo w comb. lin. finita, quindi è $\le \frac{\varepsilon}{2}$ per w grande.

Sul primo pezzo uso C.S. ed il fatto che i v_n e v_∞ sono limitati, quindi

$$|\langle v_n - v_\infty, v - w \rangle| \le |v_n - v_\infty| \cdot \underbrace{|v - w|}_{\le \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\le \underbrace{(|v_n| + |v_\infty|) \cdot \frac{\varepsilon}{2}}_{\text{piccolo se } v_n \text{ e } v_\infty \text{ sono limitati.}}$$

Step 4 Perchè dalla limitatezza di v_n posso dedurre la limitatezza di v_∞? Perchè

$$|v_\infty|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Se questa fosse grande, sarebbe grande una somma parziale fino ad un certo N, ma

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^2 = \ldots$$

Fatti generali

① Se $v_n \rightharpoonup v_\infty$, allora $|v_n| \to |v_\infty|$

② Se $v_n \rightharpoonup v_\infty$, allora non è detto che $|v_n| \to |v_\infty|$

③ Se $v_n \rightharpoonup v_\infty$, allora

$$\liminf_{n\to+\infty} |v_n| \geq |v_\infty|$$

Dim.: ① Basta dimostrare che $|v_n|^2 \longrightarrow |v_\infty|^2$.

$$|v_n|^2 = |\underbrace{v_n - v_\infty}_{a} + \underbrace{v_\infty}_{b}|^2 = \underbrace{\boxed{|v_n - v_\infty|^2}}_{\downarrow\, 0} + |v_\infty|^2 + 2\langle \underbrace{\boxed{v_n - v_\infty,}}_{\downarrow\, 0} v_\infty \rangle$$

$$\longrightarrow |v_\infty|^2$$

N.B. Ho usato che $|\langle v_n - v_\infty, v_\infty \rangle| \leq |v_n - v_\infty| \cdot |v_\infty|$ (C.S.)

② Basta pensare all'esempio della base Hilbertiana

③ Stesso p.to di partenza di ①:

$$|v_n|^2 = |v_n - v_\infty|^2 + |v_\infty|^2 + 2\langle v_n - v_\infty, v_\infty \rangle$$

$$\geq |v_\infty|^2 - 2 \boxed{\langle v_n - v_\infty, v_\infty \rangle}$$

$\hookrightarrow 0$ per definizione di convergenza debole

quindi

$$\liminf_{n\to+\infty} |v_n|^2 \geq |v_\infty|^2$$

che dimostra il p.to (iii).

— o — o —

Esempio classico $\quad F(u) := \int_a^b [\dot u(x)]^2\, dx$

Sia u_n una successione t.c. $F(u_n) \leq K$ e $\dot u_n(x) \rightharpoonup v$ debolmente in $L^2((a,b))$. Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq \int_a^b [v(x)]^2\, dx$$

(banale conseguenza del precedente)

Teorema Consideriamo

$$F(u) := \int_a^b \varphi(u_n(x))\,dx$$

Supponiamo che

(i) $u_n \longrightarrow u_\infty$ debolmente in L^2

(ii) φ convessa.

Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty)$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi'(a)\,b + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)\,b^2$

$$\geq \varphi(a) + \varphi'(a)\cdot b \qquad \text{per ogni } a \text{ e } b.$$

$$F(u_n) = \int_a^b \varphi(u_n(x))\,dx$$

$$= \int_a^b \varphi(u_\infty(x) + u_n(x) - u_\infty(x))\,dx$$

$$\geq \underbrace{\int_a^b \varphi(u_\infty(x))\,dx}_{F(u_\infty)} + \underbrace{\int_a^b \varphi'(u_\infty(x))\cdot(u_n(x) - u_\infty(x))\,dx}_{\boxed{\langle \varphi'(u_\infty(x)),\, u_n(x) - u_\infty(x)\rangle} \to 0}$$

prodotto scalare in $L^2((a,b))$

Quindi $\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty)$.

— o — o —