SSSUP 2012 — LEZIONE 20 bis

Titolo nota 04/04/2012

Base algebrica / base Hilbertiana in uno sp. di Hilbert

Indipendenza lineare Sia V uno sp. vett. Un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq V$ si dice linearmente indipendente se e solo se ogni combinazione lineare finita di elementi di $\mathcal{B}$ è $0 \iff$ tutti i coeff. sono nulli.

In simboli

$\forall n \geq 1$, $\forall v_1, \dots, v_n \in \mathcal{B}$ distinti, $\forall c_1, \dots, c_n$ reali si ha

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0 \iff c_1 = \dots = c_n = 0.$$

Base algebrica Un insieme $\mathcal{B} \subseteq V$ è una base algebrica se è linearmente indipendente e genera tutto V, cioè per ogni $v \in V$, esiste $n \geq 1$ ed esistono $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{B}$ ed esistono $c_1, \dots, c_n$ reali t.c.

$$v = \sum_{i=0}^{n} c_i v_i. \qquad (\star)$$

In altri termini: ogni elemento $v \in V$ è combinazione lineare finita di elementi di $\mathcal{B}$.

Fatto generale La scrittura $(\star)$ è unica (se ce ne fossero due diverse, porto dalla stessa parte ed avrei che $\mathcal{B}$ non è lin. indip.).

Fatto generale In ogni sp. vett. V esistono basi algebriche, anzi per ogni insieme $\mathcal{B} \subseteq V$ che sia linearmente indip., esiste almeno una base algebrica $\mathcal{B}' \supseteq \mathcal{B}$.

[Dim. basta prendere un insieme $\mathcal{B}' \supseteq \mathcal{B}$ che sia linearmente indip. e massimale (se aggiungo ancora qualcosa, perdo la lin. indip.). Questa è la base cercata. Il problema è dim. che il massimale esiste...]

__Base Hilbertiana__ Sia H uno spazio di Hilbert. Una __base Hilbertiana numerabile__ è un insieme numerabile di vettori $\{e_n\} \subseteq H$ (volendo una successione) tale che

(i) sono __ortonormali__, cioè $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

(ii) per ogni $v \in H$, esiste una successione $\{a_n\}$ di numeri reali t.c.

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n}_{\text{coefficienti, cioè numeri}} \underbrace{e_n}_{\text{vettori}}$$

Gli a_n si dicono __coefficienti__ o __componenti__ di v rispetto alla base $\{e_n\}$.

__Fatti generali__ Se $\{e_n\}$ è una base Hilbertiana, allora la scrittura di sopra è unica e $a_n = \langle v, e_n \rangle$. Inoltre

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \qquad \text{(Pitagora negli Hilbert).}$$

__Achtung!__ Se $\{e_n\}$ è una base Hilbertiana, allora una serie del tipo

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n} \leftarrow \text{serie di vettori}$$

converge se e solo se $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} < +\infty$ ← serie di numeri

__Dim.__ Poniamo $S_n := \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ $\qquad \bar{S}_n := \sum_{i=1}^{n} a_i^2$. Allora

Serie dei vettori converge $\iff$ S_n converge
$\iff$ S_n è di Cauchy (H è completo)
$\boxed{\iff}$ $\bar{S}_n$ è di Cauchy
$\iff$ $\bar{S}_n$ converge
$\iff$ serie dei numeri converge

$$\underbrace{\text{dist}^2}_{\text{distanza in } H}(S_i, S_k) \overset{i<k}{=} |a_{i+1}e_{i+1} + \ldots + a_k e_k|^2 = a_{i+1}^2 + \ldots + a_k^2 = \underbrace{\text{dist}}_{\text{distanza in } \mathbb{R}}(\bar{S}_i, \bar{S}_k).$$

<u>Esempio</u> Sia H lo spazio di Hilbert costituito dalle successioni $\{a_n\}$ di numeri reali t.c. $\sum a_n^2 < +\infty$. Il prodotto scalare tra $v = \{a_n\}$ e $w = \{b_n\}$ è dato da

$$\langle v, w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

Si dimostra che

(i) il prodotto scalare è ben definito (cioè se $v \in H$ e $w \in H$, allora la serie che definisce $\langle v, w \rangle$ converge); F

(ii) ha le proprietà di un prodotto scalare (bilineare, def. positivo) F

(iii) H risulta un Hilbert (Difficile: completezza).

Di solito questo spazio si indica con ℓ^2.

Una base Hilbertiana di ℓ^2 è data dai vettori

$$e_n = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } n}}{1}, 0, \dots)$$

Algebra lineare Fissata una base algebrica in uno spazio vettoriale V di dim. finita k, accade che ad ogni elemento $v \in V$ possiamo associare k-numeri reali $(a_1, \dots, a_k)$, cioè lo spazio risulta isomorfo ad $\mathbb{R}^k$.

Negli spazi di Hilbert Se esiste una base Hilbertiana $\{e_n\}$, allora ad ogni $v \in H$ possiamo associare la successione $\{a_n\}$ delle sue componenti, che per quanto detto prima sta in ℓ^2. In altre parole: se c'è la base Hilb., lo spazio è isomorfo ad ℓ^2.

— o — o —

Compattezza negli spazi di Hilbert

<u>Brutta notizia</u> In uno spazio di Hilbert di dimensione infinita le palle chiuse non sono compatte

$$\{v \in H : |v| \le 1\}$$

"Dim." Supponiamo che esista una base Hilbertiana $\{e_n\}$. Allora tutti i suoi elementi stanno in $\overline{B}_1(0)$ = palla con centro in 0 e raggio 1 chiusa.

Basta che dim. che $\{e_n\}$ non può avere s.succ. convergenti.
Se ci fosse una s. succ. convergente, questa sarebbe di Cauchy, ma non è possibile perché la distanza tra 2 elementi qualunque è sempre $\sqrt{2}$.

Dim. In realtà non ho usato che $\{e_n\}$ è una base Hilbertiana, ma solo che sono vettori ortonormali.
Questi si possono ottenere facilmente per induzione sfruttando il procedimento di ortonormalizzazione dell'algebra lineare

Analogamente gli insiemi del tipo $\{v \in H : |v| = 1\}$ non sono compatti.