

Def. Si indica con ℓ^2 è l'insieme delle successioni $\{a_n\}$ di numeri reali tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$$

Si tratta di uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle \{a_n\}, \{b_n\} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

Per familiarizzare:

- 0 - dim. che è un prodotto scalare
- 1 - dim. che la norma è triangolare
- 2 - DIFFICILE: dim. che è completo.

Brutalmente, è un'estensione di $\mathbb{R}^n$ con infinite componenti.

Base algebrica di uno spazio vettoriale. Insieme B di vettori linearmente indipendenti tali che ogni vettore dello spazio è combinazione lineare finita di elementi di B .

Base Hilbertiana di uno spazio vettoriale. Insieme B di vettori lin. indip. t.c. ogni elemento dello spazio è serie di combinazioni lineari di elementi di B .

Occhio! L'indipendenza lineare rimane un concetto FINITO
(ogni comb. lin. finita è 0 $\Leftrightarrow$ i coeff. sono tutti 0)

Esempio In ℓ^2 i vettori $e_n = (0, \dots, 0, \underset{\text{posiz. } n}{1}, 0, \dots)$

costituiscono una base ortonormale NUMERABILE.

Fatto: se in un Hilbert qualunque esiste una base Hilbertiana ortonormale, allora quell' Hilbert è come se fosse ℓ^2 .

Se $\{e_n\}$ è la base, allora le componenti di un generico v rispetto alla base si calcolano con i prodotti scalari!

$$a_n = \langle v, e_n \rangle = \text{numero}$$

$$\underset{\text{vettore}}{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \underset{\text{numero}}{a_n} \underset{\text{vettore}}{e_n}$$

Domanda: è vero che $\{v \in H : |v| \leq 1\}$ è compatto?

In dimensione infinita NO!!

Basta prendere una base Hilbertiana ortonormale $\{e_n\}$ per avere che non è una successione di Cauchy, in quanto $d(e_n, e_m) = \sqrt{2}$ per ogni $n \neq m$, quindi non può avere s. succ. convergenti

Osservazione Il classico procedimento di ortonormalizzazione permette, in ogni spazio di Hilbert, di avere

→ o dimensione finita

→ o un insieme $\{e_n\}$ numerabile di vettori t.c.

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= 0 & \text{se } n \neq m \\ &= 1 & \text{se } n = m \end{aligned}$$

Questo basta per avere la non compattezza delle palle in dimensione infinita

— o — o —

Convergenza DEBOLE Sia H uno spazio di Hilbert e sia x_n una successione di elementi di H . Si dice che x_n converge debolmente ad $x_\infty \in H$, e si scrive $x_n \rightharpoonup x_\infty$ se

$$\langle x_n, v \rangle \longrightarrow \langle x_\infty, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Numeri che convergono a numeri

Esempio $H = \ell^2$, $x_n = n$ -esimo elemento della base Hilbertiana

$\langle x_n, v \rangle = n$ -esima componente di v ,

quindi poiché

$$\sum \langle x_n, v \rangle^2 < +\infty$$

per definizione stessa di stare in ℓ^2 , avremo che $\langle x_n, v \rangle \rightarrow 0$,
quindi $x_n \rightarrow 0$.

Teorema 1 $\{v \in H: |v| \leq 1\}$ è compatto debolmente

Teorema 2 La norma è

- * continua fortemente
- * non continua debolmente
- * semicontinua inferiormente debolmente.

Dim. teo. 2 Se $u_n \rightarrow u_\infty$ in H , allora $|u_n| \rightarrow |u_\infty|$.

Basta dimostrare che $|u_n|^2 \rightarrow |u_\infty|^2$.

Basta dimostrare che $|u_n|^2 - |u_\infty|^2 \rightarrow 0$

$$|u_n|^2 = |u_n - u_\infty + u_\infty|^2$$

$$= \underbrace{|u_n - u_\infty|^2}_{\substack{\downarrow 0 \\ \text{perché } u_n \rightarrow u_\infty}} + |u_\infty|^2 + \underbrace{2 \langle u_n - u_\infty, u_\infty \rangle}_{\substack{\text{per C.S.} \\ |\langle \dots, \dots \rangle| \leq |u_n - u_\infty| \cdot |u_\infty| \\ \downarrow 0 \quad \downarrow \text{Fisso}}}$$

Per dimostrare che non è continua debolmente basta l'esempio della base Hilbertiana $|e_n| = 1$, $|\text{limite debole}| = 0$

Per l'ultimo punto bisogna dimostrare che, se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |u_n|^2 \geq |u_\infty|^2$$

$$|u_n|^2 = |u_\infty|^2 + 2 \underbrace{\langle u_n, u_\infty \rangle}_{\substack{\downarrow \\ \langle u_\infty, u_\infty \rangle \\ \text{per conv. debole}}} - 2 \cancel{\langle u_\infty, u_\infty \rangle} + \underbrace{|u_n - u_\infty|^2}_{\substack{\geq 0 \text{ sempre, quindi} \\ \text{al limite dà il } \geq \dots}}$$