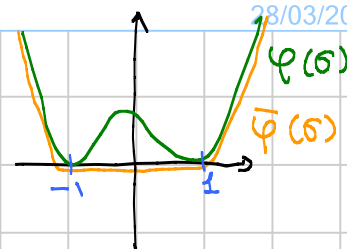


Esempio

$$F(u) = \int_{-1}^1 \{\varphi(u) + u\} dx$$

$$G(u) = \int_{-1}^1 \{\varphi(u) + u^2\} dx$$



$\min \{ G(u) : u(-1) = u(1) = 0, u \in C^1([-1, 1]) \}$ non esiste

$\min \{ F(u) : u(-1) = u(1) = 0, u \in C^1([-1, 1]) \}$ ESISTE

tranne al max un pto

Chiamo $\bar{F}(u)$ il funzionale con la $\bar{\varphi}$.

Supponendo che il minimo esista, l'eq. di Eulero diventa

$$-[\bar{\varphi}'(u)]' + 1 = 0 \quad \text{cioè} \quad [\bar{\varphi}'(u)]' = 1$$

cioè $\bar{\varphi}'(u(x)) = x + c \leftarrow$ *aggiustare in modo che $u(0) = u(1) = 0$*

È ragionevole che sia $c = 0$, così $\bar{u}(x)$ diventa dispari. Quindi devo risolvere $\bar{\varphi}'(\bar{u}(x)) = x$

Ora posso quindi definire $\bar{u}(x)$ per ogni valore $x \neq 0$. Inoltre sarà $\bar{u}(x)$ dispari e

$$\bar{u}(x) \leq -1 \quad \text{per } x < 0$$

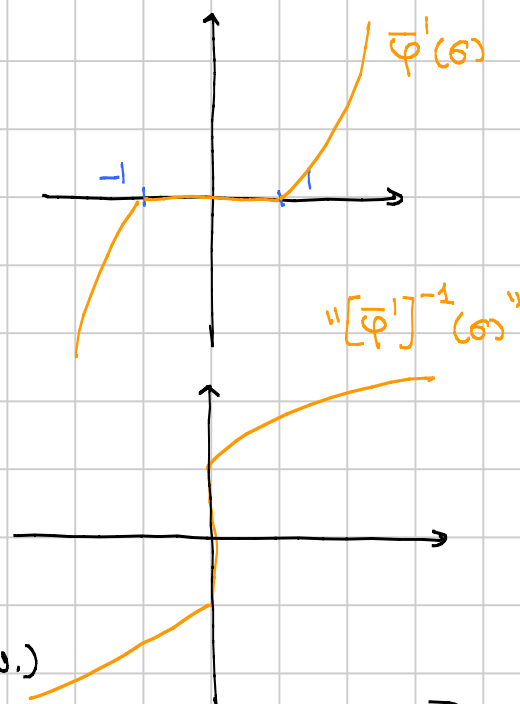
$$\bar{u}(x) \geq 1 \quad \text{per } x > 0$$

Basta ora prendere $\bar{u}(x)$ come la primitiva di $\bar{u}'(x)$ che fa 0 in ± 1 .

Ora si dimostra che

① $\bar{u}$ è pto di minimo per $\bar{F}(u)$ (dis. + conv.)

② $\bar{u}$ è " " " per $F(u)$ ($F(u) \geq \bar{F}(u)$ sempre e $F(\bar{u}) = \bar{F}(\bar{u})$)



METODI DIRETTI NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Obiettivo: dimostrare l'esistenza del minimo senza dover calcolare i punti di minimo.

Metodo: estendere i funzionali dall'ambiente primordiale ad un ambiente "naturale" dove ci sia

- * semicontinuità inferiore
- * compattezza dei sottolivelli.

Spazi di SOBOLEV. Spazi L^2 e H^1 .

Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Si definisce $L^2(a, b)$

l'insieme delle funzioni $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx < +\infty$$

Più in generale si definisce $L^p(a, b)$ imponendo $\int_a^b [f(x)]^p dx < +\infty$.

Fatto $L^2(a, b)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx$$

Dal prodotto scalare seguono la norma

$$|f|^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

e la distanza tra due funzioni

$$d(f, g) = |f - g| = \left\{ \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right\}^{1/2}$$

Cose non ovvie

- ① si verifica la disuguaglianza triangolare
- ② Il prodotto scalare è ben definito, cioè l'integrale converge
- ③ Perché L^2 è completo.

Dim di ② $|2AB| \leq A^2 + B^2$ per ogni $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$, quindi

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{1}{2} [f(x)]^2 + \frac{1}{2} [g(x)]^2$$

Dim di ① Prodotto scalare definito positivo $\Rightarrow$
disuguaglianza di Cauchy - Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad \text{in ogni Hilbert}$$

$$P(t) := |f + tg|^2 \geq 0 \text{ sempre}$$
$$= \|f\|^2 + 2t \langle f, g \rangle + t^2 \|g\|^2$$

Polinomio di 2° grado ≥ 0 per ogni $t \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow \dots$ CS.
A questo punto con qualche calcolo segue ①.

Dim ③ DIFFICILE !!!

— o — o —

Derivata debole di una funzione

Se $u \in C^1(a, b)$ e $v \in C^1(a, b)$ e $v(a) = v(b) = 0$, allora vale la formula di integrazione per parti

$$\int_a^b u(x) \dot{v}(x) dx = - \int_a^b \dot{u}(x) v(x) dx$$

"Sia ora u qualunque. Dico che u è derivabile debolmente e w è la derivata debole di u , se accade che

$$\int_a^b u(x) \dot{v}(x) dx = - \int_a^b w(x) v(x) dx \quad \forall v \in C^1(a, b) \text{ con } v(a) = v(b) = 0$$

Esempio 1 Se $u \in C^1$, allora $\tilde{u}$ è derivabile debolmente e $w = \dot{u}$

Esempio 2 Se $u(x) = |x|$, allora u è derivabile debolmente e vale

$$w(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

(fare la verifica!)

Esercizio La derivata debole, se esiste, è unica.

(supponiamo che w_1 e w_2 siano 2 derivate deboli.

Facilmente si arriva a

$$\int_a^b (w_1(x) - w_2(x)) \cdot v(x) dx = 0 \quad \forall v \in \dots$$

Da qui servirebbe il solito lemma imponendo solo che $w_1(x) - w_2(x)$ sia integrabile, e non continua...

Esempio 3 $u(x) = \sqrt{|x|}$. La sua derivata debole sarà $\frac{1}{2\sqrt{|x|}} = w(x)$

Ora $w(x)$ scoppia per $x=0$, ma l'integrale improprio converge...

Definizione $H^1((a,b))$ è l'insieme delle funzioni $u: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$u \in L^2((a,b))$$

$$\dot{u} \in L^2((a,b))$$

↑ derivata debole di u .

Osservazione H^1 è l'ambiente "naturale" in cui trattare

$$F(u) = \int_a^b (\dot{u}^2 + u^2) dx$$

Achtung! $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \neq & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Non è derivabile debolmente!