SSSUP 2012 — LEZIONE 18

Titolo nota 22/03/2012

<u>Esempio</u> $\quad F(u) = \int_0^1 \{[\ddot{u}(x)]^2 + 5x^2 u(x)\}\,dx$

$$\min\{F(u) : u \in C^2([0,1]),\ u(0)=0,\ u(1)=7\}$$

Perturbazioni : $v \in C^2([0,1])$ t.c. $v(0)=v(1)=0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^1 \{\cancel{\ddot{u}^2} + 2t\ddot{u}\ddot{v} + t^2\ddot{v}^2 + \cancel{5x^2u} + 5tx^2 v - \cancel{\ddot{u}^2} - \cancel{5x^2u}\}\,dx$$

$$= \int_0^1 (2\ddot{u}\ddot{v} + 5x^2 v)\,dx = 0$$

Integro per parti il 1° termine

$$\int_0^1 \ddot{u}\ddot{v}\,dx = \underbrace{[\ddot{u}\dot{v}]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \dddot{u}\dot{v}\,dx$$

=0 se uso perturbazioni con $\dot{v}(0) = \dot{v}(1) = 0$

$$= -\int_0^1 \dddot{u}\dot{v}\,dx = -[\dddot{u}v]_0^1 + \int_0^1 u^{IV} v\,dx = 0$$

Quindi, assumendo $v(0)=v(1)=\dot{v}(0)=\dot{v}(1)=0$ ottengo che

$$\int_0^1 (2u^{IV}\cdot v + 5x^2 v)\,dx = 0, \quad \text{cioè} \quad \int_0^1 (2u^{IV} + 5x^2)v\,dx = 0$$

Per il solito Lemma (achtung! ora serve anche $\dot{v}(0)=\dot{v}(1)=0$) si ha che u risolve

$2u^{IV} + 5x^2 = 0$ (ordine eq. = 2 ordine del funzionale)

$u(0)=0,\ u(1)=7$ (Dirichlet ereditate dal funzionale)

$\ddot{u}(0) = \ddot{u}(1) = 0$ (Neumann che compaiono)

Come nascono le Neumann? Riscrivendo

$$\int_0^1 (2\ddot{u}\ddot{v} + 5x^2 v)\,dx = 0 \qquad \forall v \in C^2 \quad t.c. \quad v(0) = v(1) = 0 \text{ e basta}$$

come

$$\int_0^1 \underbrace{(+2u^{IV} + 5x^2) v\,dx}_{\overset{\shortparallel}{0}} \pm \underbrace{[\dddot{u} v]_0^1}_{\overset{\shortparallel}{0}} \pm \underbrace{[\ddot{u}\dot{v}]_0^1}_{} = 0$$

perché $v(0) = v(1) = 0$

Deve essere $= 0 \ \forall v \in \ldots$ da cui $\ddot{u}(0) = \ddot{u}(1) = 0$.

Nell'esempio si trova esplicitamente la soluzione che è un polinomio di 6° grado. Si verifica con la disuguaglianza che è l'unico p.to di minimo.

—o —o —

<u>Osservazione</u> Per un problema di minimo con $\ddot{u}$ posso assegnare, volendo, i valori di u e $\dot{u}$ al bordo

$$\min \{ F(u) : u \in C^2([0,1]),\ u(0) = 0,\ u(1) = 7,\ \dot{u}(0) = 3,\ \dot{u}(1) = -6 \}$$

Ancora una volta le perturbazioni ammissibili hanno $v(0) = v(1) = \dot{v}(0) = \dot{v}(1) = 0$.

—o —o —

<u>Caso generale</u> $\displaystyle F(u) = \int_a^b \varphi(x, u, \dot{u})\,dx$

Come ricavare l'eq. di Eulero. Come sempre $v(a) = v(b) = 0$

$$F(u+tv) = \int_a^b \varphi(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v})\,dx = (*)$$

Taylor-Lagrange: $\varphi(x, u+h, w+k) = \varphi(x, u, w) + h\varphi_u(x,u,w) + k\varphi_{\dot{u}}(x,u,w) + \frac{1}{2}h^2 \varphi_{uu}(x, u+\xi, w+\eta) + hk\ldots + k^2\ldots$

Quindi

$$\varphi(x, u+tv, \dot u+t\dot v) = \varphi(x,u,\dot u) + tv\,\varphi_u(x,u,\dot u) + t\dot v\,\varphi_{\dot u}(x,u,\dot u) + t^2\cdot \text{roba}$$

$$\star = \int_a^b \varphi(x,u,\dot u)\,dx + t\int_a^b \varphi_u(x,u,\dot u)\,v\,dx + t\int_a^b \varphi_{\dot u}(x,u,\dot u)\,\dot v\,dx$$

$$+ t^2\cdot \text{roba}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = \boxed{\int_a^b \varphi_u(x,u,\dot u)\,v\,dx + \int_a^b \varphi_{\dot u}(x,u,\dot u)\,\dot v\,dx}$$

Integro per parti il 2° termine:

$$\int_a^b \varphi_{\dot u}(x,u,\dot u)\,\dot v\,dx = \underbrace{\left[\varphi_{\dot u}(x,u,\dot u)\,v\right]_a^b}_{=0 \text{ se } v(a)=v(b)=0} - \int_a^b \left[\varphi_{\dot u}(x,u,\dot u)\right]'\,v\,dx$$

Ottengo

$$\int_a^b \left\{\varphi_u(x,u,\dot u) - \left[\varphi_{\dot u}(x,u,\dot u)\right]'\right\} v\,dx = 0$$

Il solito lemma porta all'equazione

$$\left[\varphi_{\dot u}(x,u,\dot u)\right]' = \varphi_u(x,u,\dot u)$$

$$= \boxed{\varphi_{\dot u x}(x,u,\dot u) + \varphi_{\dot u u}(x,u,\dot u)\,\dot u + \varphi_{\dot u\dot u}(x,u,\dot u)\,\ddot u = \varphi_u(x,u,\dot u)}$$

Esempio: $\varphi(x,u,\dot u) = \dot u^2 + u^2 - 7u$ $\qquad \varphi_u = 2u-7$

$\varphi_{\dot u} = 2\dot u \qquad \varphi_{\dot u\dot u} = 2$

$2\ddot u = 2u - 7$

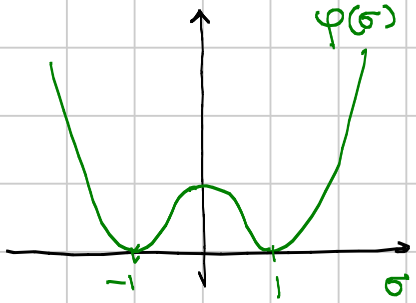
— o — o —

$$F(u) = \int \left(\dot{u}^4 + 3u^2 - 7\cos x \cdot \arctan u\right) dx$$

$$\varphi_{\dot{u}} = 4\dot{u}^3 \qquad \varphi_u = 6u - 7\frac{\cos x}{1+u^2} \qquad \varphi_{\dot{u}\dot{u}} = 12\dot{u}^2$$

$$\boxed{12\dot{u}^2\,\ddot{u} = 6u - 7\frac{\cos x}{1+u^2}}$$ Eq. di Eulero.

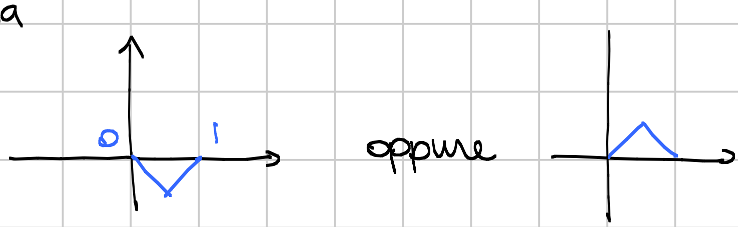
— o — o —



Esempio $\min\{F(u) : u(0) = u(1) = 0\}$

$$F(u) = \int_0^1 \varphi(\dot{u})$$

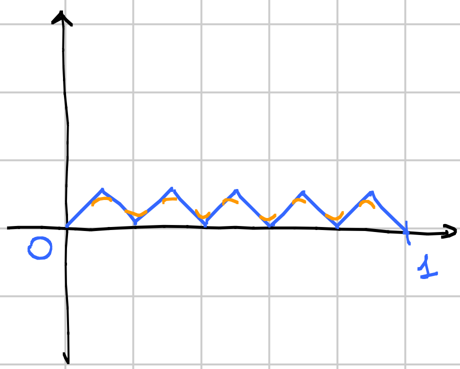
Se impongo $u \in C^1([0,1])$ il problema non ha soluzione.
L'inf. è 0 ed è approssimato da una successione u_n che approssima



$$F(u) = \int_0^1 \left(\varphi(\dot{u}) + u^2\right) dx, \text{ sempre con condizioni } u(0) = u(1) = 0.$$

Come prima: il minimo non esiste, l'inf. è 0, ed è realizzato da una successione di questo tipo

Due livelli di approssimazione



- prima scegliere la "sega" fitta a sufficienza in modo da avere $\int u^2$ basso

- poi smussare gli angoli pagando poco con $\int \varphi(\dot{u})$

Se invece ho $\displaystyle\int_0^1 (\varphi(\dot u) + 7u)\, dx$

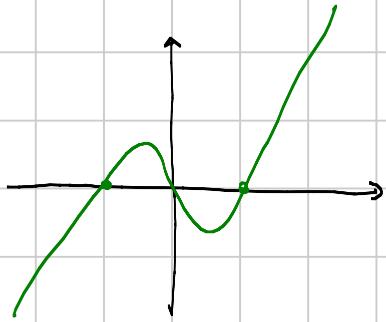
Se faccio l' equazione di Eulero ... ottengo

$$\int_0^1 (\varphi'(\dot u)\,\dot v + 7v)\, dx = 0 \qquad \forall v \in C^1([0,1]) \text{ t.c. } v(0) = v(1) = 0$$

Integrando per parti: $\displaystyle\int_0^1 ([\varphi'(\dot u)]' - 7)\, v = 0$

Solito lemma $\Rightarrow$ $[\varphi'(\dot u)]' = 7$ o volendo $\varphi''(\dot u)\,\ddot u = 7$

Da cui $\varphi'(\dot u) = 7x + c$ per una opportuna c



Se $7x+c$ fosse enorme (o molto negativo), potevo ricavare $\dot u$ invertendo la φ'.
C'è speranza di avere una soluzione regolare ...

— o — o —