SSSUP 2012 — LEZIONE 17

Funzionali del tipo $F(u) = \int_a^b \varphi(x, u, \dot{u})\, dx$

<u>Esempio</u> $F(u) = \int_0^1 \{[\dot{u}(x)]^2 + [u(x)]^2 - 7u(x)\}\, dx$

$\min \{ F(u) : u \in C^1([0,1]),\ u(0) = u(1) = 0 \}$ (D)

$\min \{ F(u) : u \in C^1([0,1]) \}$ (N)

Metodo indiretto: derivata direzionale. Fisso $v \in C^1([0,1])$

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \{(\dot{u} + t\dot{v})^2 + (u+tv)^2 - 7(u+tv) - \dot{u}^2 - u^2 + 7u \}\, dx$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \{\cancel{\dot{u}^2} + 2t\dot{u}\dot{v} + t^2\dot{v}^2 + \cancel{u^2} + 2tuv + t^2v^2 - \cancel{7u} - 7tv - \cancel{\dot{u}^2} - \cancel{u^2} + \cancel{7u} \}\, dx$$

$$= \lim_{t \to 0} \int_0^1 (2\dot{u}\dot{v} + 2uv - 7v)\, dx + \underbrace{t \int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2)\, dx}_{\to 0}$$

<u>Equazione di Eulero</u>: $\int_0^1 (2\dot{u}\dot{v} + 2uv - 7v)\, dx = 0 \quad \forall v \in C^1([0,1])$

+ event. $v(0) = v(1) = 0$

Ora integro per parti il 1° termine $\int_0^1 \dot{u}\dot{v}\, dx = \underbrace{+[\dot{u}v]_0^1}_{\substack{=0 \text{ se} \\ v(0)=v(1)=0}} - \int_0^1 \ddot{u} v\, dx$

Quindi se $v(0) = v(1) = 0$ posso riscrivere l'eq. di Eulero come

$$\int_0^1 (-2\ddot{u}v + 2uv - 7v)\, dx = 0, \quad \text{cioè} \quad \int_0^1 (-2\ddot{u} + 2u - 7) \cdot v\, dx = 0$$

da cui (solito lemma): $\boxed{-2\ddot{u} + 2u - 7 = 0}$

Risolvo l'equazione $\ddot{u} - u + \frac{7}{2} = 0$

La soluzione generale è $u(x) = \frac{7}{2} + a e^{x} + b e^{-x}$

Determino a e b imponendo le condizioni al bordo $u(0) = u(1) = 0$ (non è detto in generale che la soluzione esista e/o sia unica)

$$\begin{cases} \frac{7}{2} + a + b = 0 \\ \frac{7}{2} + ea + e^{-1} b = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ in questo caso c'è soluzione unica (la matrice dei coeff. ha rango 2).

—o —o —

Sia $\bar{u}(x)$ l'unica sol. dell'eq. con i dati al bordo. Dico che $\bar{u}$ è l'unico p.to di min per il problema (D). Prendo una qualunque $w \in C^1([0,1])$, la scrivo come $w = \bar{u} + v$ e sostituisco

$$F(w) = F(\bar{u}+v) = \int_0^1 \{ (\dot{\bar{u}} + \dot{v})^2 + (\bar{u}+v)^2 - 7(\bar{u}+v) \} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\boxed{\dot{\bar{u}}^2} + 2\dot{\bar{u}}\dot{v} + \boxed{\dot{v}^2} + \boxed{\bar{u}^2} + 2\bar{u}v + \boxed{v^2} \boxed{- 7\bar{u}} - 7v \right) dx$$

$$= F(u) + \underbrace{\int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2)\, dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^1 (2\dot{\bar{u}}\dot{v} + 2\bar{u}v - 7v)\, dx}_{\substack{= 0 \text{ per l'Eq. di} \\ \text{Eulero (scarico ...)}}}$$

$$\geq F(u)$$

con uguaglianza $\Leftrightarrow v(x) \equiv 0$.

—o —o —

Problema (N) Ora sono ammissibili anche perturbazioni con $v \neq 0$ al bordo.

Come prima arrivo a $\int_0^1 (2\dot{u}\dot{v} + 2uv - 7v)\, dx = 0$.

Lo scrivo come

$$\int_0^1 (2uv - 7v)\, dx = -\int_0^1 2\dot{u}\dot{v}\, dx = -[2\dot{u}v]_0^1 + 2\int_0^1 \ddot{u} v\, dx$$

Usando solo perturbazioni con $v(0) = v(1) = 0$ ottengo l'uguaglianza del termine a sx e dell'ultimo a dx, da cui come prima $-2\ddot{u} + 2u - 7 = 0$, cioè

$$\underbrace{\int_0^1 (-2\ddot{u} + 2u - 7) v \, dx}_{=0} = -[2\dot{u}v]_0^1$$

indipendentemente dal sapere che $v(0) = v(1) = 0$

Ora so che

$$[2\dot{u}v]_0^1 = 2(\dot{u}(1)v(1) - \dot{u}(0)v(0)) = 0$$

per ogni v, anche non nulla al bordo.

Uso una $v(x)$ t.c. $v(0) \neq 0$, $v(1) = 0$ e ottengo $\dot{u}(0) = 0$

" " " " $v(0) = 0$, $v(1) \neq 0$ " " $\dot{u}(1) = 0$.

Ho così ottenuto che u risolve

$$\begin{cases} -2\ddot{u} + 2u - 7 = 0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0 \end{cases}$$

Ora si trova la soluzione (che non è obbligata ad esistere o essere unica)

$$u(x) = \frac{7}{2} + ae^{x} + be^{-x} \qquad \dot{u}(x) = ae^{x} - be^{-x}$$

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ ea - e^{-1}b = 0 \end{cases}$$ La soluzione è $a = b = 0$, quindi $u(x) \equiv \frac{7}{2}$

È immediato verificare con la disuguaglianza che è l'unico p.to di minimo.

— o — o —

TERMINOLOGIA

- Problema di DIRICHLET: equazione di ordine 2 + fissare i 2 valori di u al bordo
- Problema di NEUMANN: equazione di ordine 2 + valori di $\dot{u}$ al bordo.

In generale:

- problema di minimo per funzionale con $\int \varphi(\dot{u}, u, x)$
  $\rightsquigarrow$ equazione di Eulero di ordine 2.
- condizioni al bordo nel problema $\rightsquigarrow$ condizioni di D sull'equazione
- assenza di condizioni al bordo nel problema $\rightsquigarrow$ condizioni di N sull'equazione

—o—o—

Se l'esempio fosse stato $\min \left\{ F(u) : u \in C^1([0,1]), \ u(0) = 5 \right\}$

si trovava da risolvere

$$\begin{cases} -2\ddot{u} + 2u - 7 = 0 \\ u(0) = 5 \\ \dot{u}(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{soluzione unica !!!}$$

Per esercizio ripetere il ragionamento!

—o—o—

$$F(u) = \int_0^{\pi} (\dot{u}^2 - u^2)\, dx \qquad \min \left\{ F(u) : u \in C^1([0,1]) \ u(0) = u(\pi) = 0 \right\}$$

L'Equazione di Eulero diventa $\begin{cases} \ddot{u} + u = 0 & (\text{ricavare}) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$

La soluzione generale è $u(x) = a\cos x + b\sin x$.

Impongo le condizioni al bordo:

$a = 0$ (2 volte...) Quindi ci sono infinite soluzioni $u(x) = b\sin x$.

Se le condizioni fossero state $u(0) = 0$, $u(\pi) = 1$ l'equazione era impossibile.

Se invece di π avessi avuto qualcosa $\neq k\pi$, allora era possibile risolvere.

Achtung! No teoremi di esistenza e unicità per problemi D o N.