SSSUP 2012 — LEZIONE 16

Titolo nota 14/03/2012

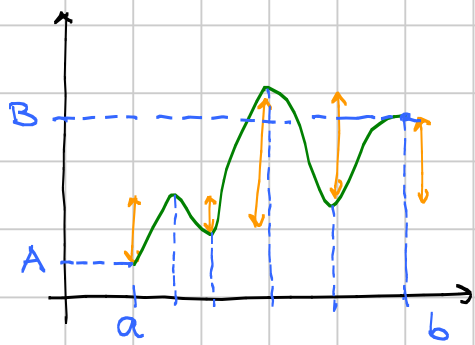
Esercizio Dimostrare che nell'ultimo esempio la retta è l'unico p.to di minimo, anche se si ammettono "competitori" che sono C^1 solo ovunque tranne un numero finito di punti.

[Hint: usare il solito Taylor - Lagrange e scoprire che non si può avere uguaglianza per ogni x ...]

Esempio 1 $\min \left\{ \int_a^b |\dot{u}(x)|\, dx \ : \ u \in C^1([a,b]),\ u(a) = A,\ u(b) = B \right\}$

Ora $\varphi(\sigma) = |\sigma|$ e non è nemmeno C^1... e $\varphi''(\sigma) = 0$ per $\sigma \neq 0$...
Cosa rappresenta il funzionale?
Se non ci fosse il valore assoluto, sarebbe la differenza tra i valori di u agli estremi. Stessa cosa se c'è $|\cdot|$, ma $\dot{u} \geq 0$ sempre o $\dot{u} \leq 0$ sempre.
Se $\dot{u}$ cambia segno, applico i ragionamenti precedenti in tutti i sottointervalli

$F(u)$ = somma dei dislivelli, contati tutti con segno positivo.



Quindi

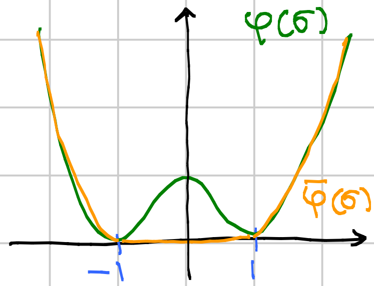
1 - $\min F(u) = |B - A|$

2 - i p.ti di minimo sono tutte e sole le funzioni monotone

Esercizio Fare una dimostrazione rigorosa con una specie di Taylor-Lagrange applicato a $\varphi(\sigma) = |\sigma|$

—o—o—

Esempio 2 Solito problema con $\varphi(\sigma) = (\sigma^2-1)^2$



$$\min \left\{ \int_0^1 \varphi(\dot{u})\, dx : u(0)=0, u(1)=2 \right\}$$

L'unico minimo è la retta.
Considero la più grande funzione convessa $\bar{\varphi}(\sigma)$ che sta sotto $\varphi(\sigma)$.
Pongo $F(u) = \int_0^1 \varphi(\dot{u}(x))\, dx$ $\quad \bar{F}(u) = \int_0^1 \bar{\varphi}(\dot{u}(x))\, dx$

Sia $\bar{u}$ la retta.
Fatto 1 Per ogni $u \in \ldots$ si ha che $F(u) \geq \bar{F}(u)$
Fatto 2 La $\bar{u}$ è un minimo per $\bar{F}(u)$
Fatto 3 La $\bar{u}$ è un minimo per $F(u)$

Dim. Prendo una qualunque altra w. Allora

$$F(w) \underset{\uparrow\, 1}{\geq} \bar{F}(w) \underset{\uparrow\, 2}{\geq} \bar{F}(\bar{u}) \underset{\uparrow}{=} F(\bar{u})$$

perchè $\bar{u}$ ha pendenza $m=2$ e $\varphi(2) = \bar{\varphi}(2)$

Fatto 4 La $\bar{u}$ è l'unico minimo di $\bar{F}(u)$ (vedi es. precedente)
Fatto 5 La $\bar{u}$ è l'unico minimo per $F(u)$ (stessa dim. del fatto 3 con il segno $>$ dove uso 2).

Tecnica astratta Siano F e G due funzionali. Supponiamo che
1 – $F(u) \geq G(u)$ per ogni u
2 – u_0 p.to di minimo di $G(u)$
3 – $F(u_0) = G(u_0)$
Allora u_0 è p.to di minimo di $F(u)$.
Se u_0 è unico nell'ipotesi 2, allora è l'unico p.to di minimo.

Dim: come sopra.

__Esempio 3__ Stessa $\varphi(\sigma) = (\sigma^2-1)^2$.

$$\min \left\{ \int_0^1 \varphi(\dot{u}(x))\, dx \ : \ u(0) = 0 \ , \ u(1) = \tfrac{1}{2} \right\}$$

Se invece di φ avessi $\bar{\varphi}$, allora il minimo sarebbe $=0$, realizzato dalla retta, e da tutte le u con $|$ derivata $| \leq 1$.
Per nessuno di questi p.ti di minimo per $\bar{F}$ si ha $F(u) = \bar{F}(u)$.

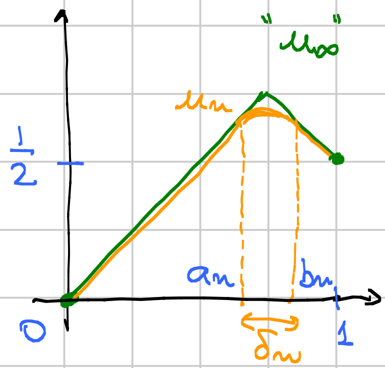
Indizio per dire che $\inf F(u) = 0$ e $\min F(u)$ non esiste.
Devo dimostrare 2 cose.

1 - Non esiste nessun competitore per cui $F(u) = 0$

__Dim.__ Dovrebbe essere $\dot{u}(x) = \pm 1$ per ogni $x \in [0,1]$ (sempre lo stesso), ma allora le condizioni al bordo non sono rispettate.

2 - Esiste una successione u_n di competitori t.c. $F(u_n) \to 0$.

Basta che il tratto di transizione δ_n abbia ampiezza che tende a 0.



$$F(u_n) = \int_{a_n}^{b_n} \varphi(\underbrace{\dot{u}_n(x)}_{\text{in } [-1,1]})\, dx$$

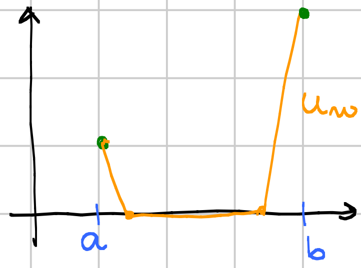
$$\leq (b_n - a_n) \max_{\sigma \in [-1,1]} \varphi(\sigma)$$

— o — o —

__Osservazione__ Se ammetto come competitori tutte le $u \in C^0([0,1])$ che sono C^1 ovunque tranne in un p.to, allora u_∞ diventa un p.to di min. ammissibile.

— o — o —

Esempio 4 $\quad \min \left\{ \int_a^b u^2(x)\,dx \ : \ u(a) = A, \ u(b) = B \right\}$



L'inf è $= 0$, ma è minimo $\Leftrightarrow A = B = 0$

Oss. In generale il problema $\min \left\{ \int_a^b \varphi(u(x))\,dx \ : \ u(a) = A, \ u(b) = B \right\}$

"costringe" $u(x)$ ad andare il più in fretta possibile nel p.to di minimo di $\varphi(\sigma)$

Esempio 5 $\quad \min \left\{ \int_0^1 u^2(x)\,dx \ : \ \int_0^1 u(x)\,dx = 8, \ u \in C^0([0,1]) \right\}$

$$\min \left\{ \int_0^1 |u(x)|^{1/2}\,dx \ : \ \int_0^1 u(x)\,dx = 8 \right\}$$

Trucco: sia $v(x)$ una primitiva di $u(x)$, per fissare le idee, quella che fa 0 in $x=0$. Allora

$$F(u) = \int_0^1 u^2(x)\,dx = \int_0^1 [\dot{v}(x)]^2\,dx$$

Il vincolo $\int_0^1 u(x)\,dx = 8$ diventa $v(1) - v(0) = 8$.

Facendo l'equazione di Eulero trovo che $v(x)$ è una retta, quindi $u(x)$ è una costante (l'unica che rispetta il vincolo)

Esercizio Dimostrarlo rigorosamente con la disuguaglianza
Capire anche il caso con $|u(x)|^{1/2}$.