SSSUP 2012 — LEZIONE 15

Titolo nota 14/03/2012

$$\min \Big\{ \underbrace{\int_a^b \varphi(\dot u(x))\,dx}_{F(u)} \;:\; u(a)=A,\; u(b)=B,\; u\in C^1([a,b]) \Big\}$$

<u>Teorema</u> Se $\varphi''(\sigma)>0$ per ogni $\sigma\in\mathbb{R}$ (in particolare φ è strettamente convessa), allora il minimo esiste e l'unico p.to di min è la retta passante per (a,A) e (b,B).

<u>Dim.</u> Determino l'equazione di Eulero. Data $u\in C^1([a,b])$ e $v\in C^1([a,b])$ con $v(a)=v(b)=0$, calcolo

$$\lim_{t\to0}\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = \lim_{t\to0}\frac{1}{t}\int_a^b [\varphi(\dot u+t\dot v)-\varphi(\dot u)]\,dx$$

$$= \lim_{t\to0}\int_a^b \boxed{\frac{\varphi(\dot u(x)+t\dot v(x))-\varphi(\dot u(x))}{t}}\,dx = \int_a^b \varphi'(\dot u(x))\,\dot v(x)\,dx$$

$\leftarrow$ per ogni x fisso

$\varphi'(\dot u(x))\,\dot v(x)$

per questo serve un teorema di scambio tra limite ed integrale

Supposto buono il teo. di scambio, arriviamo a

$$\boxed{\int_a^b \varphi'(\dot u(x))\,\dot v(x)\,dx = 0 \qquad \forall v \text{ scelta come sopra}}$$

Eq. Eulero

Integrando per parti, e supponendo u e φ regolari quanto serve

$$\int_a^b \varphi'(\dot u(x))\,\dot v(x)\,dx = \underbrace{\Big[\varphi'(\dot u(x))\,v(x)\Big]_a^b}_{=0 \text{ perché } v(a)=v(b)=0} - \underbrace{\int_a^b [\varphi'(\dot u(x))]'\,v(x)\,dx}_{\text{quindi questo è } =0}$$

$$= -\int_a^b \varphi''(\dot u(x))\,\ddot u(x)\,v(x)\,dx$$

Per il lemma fondamentale si ha che $\underbrace{\varphi''(\dot u(x))}_{>0}\,\ddot u(x) = 0 \quad \forall x\in[a,b]$

Quindi $\ddot u(x)=0$ in $[a,b]$ $\Rightarrow$ u è la retta.

Dimostro che la retta è meglio di tutto. Sia $\bar{u}(x)$ la retta. Sia w un'altra funzione C^1 con $w(a) = A$ e $w(b) = B$. Posso pensare $w = \bar{u} + v$ con $v \in \dots$. Allora

$$F(w) - F(\bar{u}) = F(\bar{u}+v) - F(\bar{u})$$

$$= \int_a^b [\varphi(\dot{\bar{u}} + \dot{v}) - \varphi(\dot{\bar{u}})]\, dx = (*)$$

Per la convessità di φ si ha che

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi'(x)\, y + \frac{1}{2} \underbrace{\varphi''(\xi)}_{>0} y^2 \qquad \text{(Taylor-Lagrange)}$$

$$\geq \varphi(x) + \varphi'(x)\, y \qquad \text{Ho usato la convessità}$$

$$(*) \geq \int_a^b \varphi'(\dot{\bar{u}}(x))\, \dot{v}(x)\, dx$$

$$= \varphi'(m) \int_a^b \dot{v}(x)\, dx = \varphi'(m) [v(x)]_a^b = 0$$

coeff. ang. della retta

Questo dimostra che $F(w) \geq F(\bar{u})$ e inoltre vale il segno di uguale $\Leftrightarrow$ c'è l'uguaglianza nel passaggio dopo Taylor-Lagrange, il che vale $\Leftrightarrow$ $v(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$, cioè $\Leftrightarrow$ $w = \bar{u}$.

Quindi la retta è l'unico minimo.

—o—o—

<u>Osservazione 1</u> La seconda pagina, da sola, basta per dimostrare il teorema, anche senza l'euristica iniziale.

<u>Osservazione 2</u> Se $\varphi''(\sigma) < 0$ per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$, allora lo stesso argomento mostrerebbe che la retta è l'unico punto di <u>massimo</u> per $F(u)$

—o—o—

Sistemazione rigorosa del passaggio al limite nell' integrale

$$\int_a^b \frac{\varphi(\dot{u}+t\dot{v})-\varphi(\dot{u})}{t}\,dx \longrightarrow \int_a^b \varphi'(\dot{u})\dot{v}\,dx$$

Dim Taylor - Lagrange! $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi'(x)y + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)y^2$

quindi

$$\varphi(\underbrace{\dot{u}(x)}_{x} + \underbrace{t\dot{v}(x)}_{y}) = \varphi(\dot{u}(x)) + \varphi'(\dot{u}(x))t\dot{v}(x) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)t^2\dot{v}(x)^2$$

quindi

dipende da x e t

$$\int_a^b \frac{\varphi(\dot{u}(x)+t\dot{v}(x))-\varphi(\dot{u}(x))}{t} - \varphi'(\dot{u}(x))\dot{v}(x) = \int_a^b \frac{1}{2}\varphi''(\xi)\,t[\dot{v}(x)]^2dx$$

$$= t\,\frac{1}{2}\int_a^b \varphi''(\xi)[\dot{v}(x)]^2\,dx$$

Ora $|\dot{v}(x)|$ è limitato perché $\dot{v}$ è continua in $[a,b]$

ξ è limitato perché sta tra $\dot{u}(x)$ e $\dot{u}(x)+t\dot{v}(x)$, ed entrambi sono limitati

$\varphi''(\xi)$ è limitata perché φ'' è continua e ξ è limitato.

Quindi differenza = $t\cdot$ roba limitata $\to 0$.

— o — o —

Osservazione Nel passaggio al limite, NON ho usato la convessità di φ, ma solo il suo essere C^2.

— o — o —

Cosa succede se $\varphi''(\sigma) \geq 0$ per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$?

Dipende dagli annullamenti di $\varphi''(\sigma)$.

Vale ancora che la retta è UN p.to di minimo (la dim. è la stessa del caso precedente, 2ª pagina).

Potrebbe non essere l' unico p.to di minimo, e qui entrano in gioco gli annullamenti.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $\varphi''(\sigma)$ si annulla "sporadicamente", cioè l'insieme $\{\sigma \in \mathbb{R} : \varphi''(\sigma) = 0\}$ NON contiene intervalli.
Questo è equivalente a dire che $\varphi'(\sigma)$ è STRETTAMENTE crescente. Ora l'eq. di Eulero è

$$\varphi''(\dot u)\,\ddot u = 0, \quad \text{cioè} \quad [\varphi'(\dot u)]' = 0, \quad \text{cioè}$$

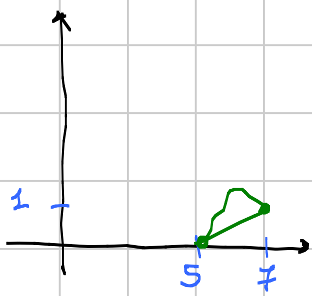
$$\varphi'(\dot u(x)) = \text{costante}$$

Essendo φ' strett. cresc., è pure iniettiva, quindi questo basta a garantire $\dot u(x) = \text{costante}$, cioè u = retta.
Quindi la retta è l'unico minimo.

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\varphi''(\sigma)$ si annulla in un intero intervallo. Ora basta che $\dot u(x) \in$ intervallo di annullamento di $\varphi''(\sigma)$ e l'eq. di Eulero è automatica.

<u>Esempio 1</u> $\min \left\{ \int_5^7 \varphi(\dot u) : u \in C^1([5,7]) \right.$
$\left. u(5) = 0,\ u(7) = 1 \right\}$

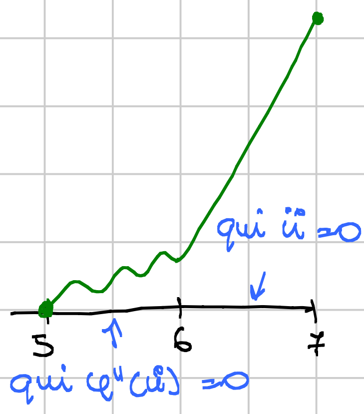
La retta è un p.to di minimo. Ce ne sono altri? Sì: tutte le funzioni per i due punti con |derivata| ≤ 1 ovunque



<u>Esempio 2</u> $\min \left\{ \int_5^7 \varphi(\dot u) : u \in C^1 \ldots \right.$
$\left. u(5) = 0,\ u(7) = 3 \right\}$

La retta è un p.to di minimo, ma ha $\dot u(x) = \frac{3}{2}$, che sta fuori dalla zona di annullamento.
È unico? In linea teorica potrei

- perdere tempo tra $x = 5$ e $x = 6$ con |derivata| ≤ 1
- poi andare "a retta" fino a $x = 7$



Così facendo sono soluzione dell'eq. di Eulero
Non sarei C^1 ovunque, ma ovunque tranne in 6...