SSSUP 2012 — LEZIONE 14

Titolo nota 06/03/2012

Esempio 1 $\min \Big\{ \int_0^1 \dot{u}^2 \, dx : \underbrace{u \in C^1([0,1]),\ u(0)=1,\ u(1)=7}_{X} \Big\}$

Metodo diretto: cerco una metrica, o topologia, o nozione di convergenza in X che mi garantisca
- $\to$ $F(u)$ è semicontinuo inferiormente s.c.i.
- $\to$ i sottolivelli di u sono compatti.

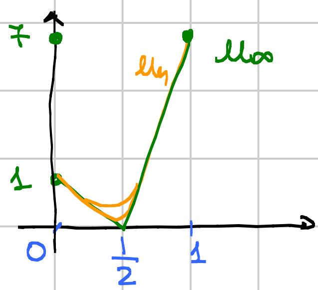
Possibilità 1
$$d_1(u,v) := \sup\{|u(x)-v(x)| : x \in [0,1]\} + \sup\{|\dot{u}(x)-\dot{v}(x)| : x \in [0,1]\}$$

Ottima notizia: $F(u)$ è continuo. Infatti se $u_n \to u_\infty$ in X rispetto alla d_1, cioè $d_1(u_n, u_\infty) \to 0$, questo vuol dire in particolare che $\dot{u}_n \to \dot{u}_\infty$ uniformemente, dunque posso passare al limite negli integrali perchè anche $\dot{u}_n^2 \to \dot{u}_\infty^2$ unif.

$$F(u_n) = \int_0^1 [\dot{u}_n(x)]^2 \, dx \longrightarrow \int_0^1 \dot{u}_\infty^2(x) \, dx$$

Il fatto che $u_n \to u_\infty$ unif. garantisce che u_∞ rispetta la condizione al bordo.

Pessima notizia: i sottolivelli non sono compatti.
Dico che
$$\{u \in X : F(u) \leq 77\}$$
non è compatto rispetto a d_1. Basta trovare una successione che non abbia s.succ. convergenti.



Le u_n hanno derivata equilimitata, quindi di sicuro $F(u_n) \leq 77$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Se convergono a q.c., convergono a u_∞ che $\notin X$.

Possibilità 2 $\qquad d_0(u,v) := \sup\{|u(x)-v(x)| : x \in [0,1]\}$

I sottolivelli sono compatti? No, perché c'è lo stesso esempio di prima: $F(u_n) \le 77$, ma $u_n \to u_\infty \notin X$ anche rispetto a d_0.

Come aggiustare le cose $\qquad$ ROAD MAP

① Cercare un ambiente più grande $\overline{X} \supseteq X$ con una qualche struttura

② Estendere F da X a $\overline{X}$, cioè trovare un'altra funzione
$$\overline{F} : \overline{X} \to \mathbb{R}$$

③ Sperare di poter applicare W. generalizzato a $\overline{F}$ su $\overline{X}$, trovando così dei p.ti di minimo $\overline{x}_0 \in \overline{X}$

④ Sperare che $\overline{x}_0 \in$ in realtà ad X e sia p.to di min per F, ad esempio perché per puro caso $F(x) = \overline{F}(x)$ per ogni $x \in X$.

— o — o —

Esempio 2 $\qquad \min\Big\{ \underbrace{\int_0^1 \dot u^4\,dx}_{F(u)} \; : \; \underbrace{u(0)=0,\ u(1)=7,\ u \in C^1([0,1])}_{X} \Big\}$

Prendo $v \in C^1([0,1])$ t.c. $v(0)=v(1)=0$. Calcolo

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^1 \{(\dot u + t\dot v)^4 - \dot u^4\}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^1 (\dot u^4 + 4t\dot u^3\dot v + o(t) - \dot u^4)\,dx = 4\int_0^1 \dot u^3 \dot v\,dx$$

Facciamo finta che sia $u \in C^2$ e integriamo per parti

$$\int_0^1 [\dot u(x)]^3\,\dot v(x)\,dx = \underbrace{\left[\dot u^3(x)\,v(x)\right]_0^1}_{=\,0} - \int_0^1 3\dot u(x)^2\,\ddot u(x)\,v(x)\,dx$$

$$\boxed{\int_0^1 [\dot u(x)]^2\,\ddot u(x)\cdot v(x)\,dx = 0 \quad \text{per ogni } v \in C^1([0,1]) \text{ con } v(0)=v(1)=0}$$

EQ. EULERO

Per il lemma fondamentale: $[\dot u(x)]^2 \, \ddot u(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$

Le uniche soluzioni C^1 di questa equazione sono le rette.

Lo stesso trucco dell'esempio 1 permette di dimostrare che è effettivamente il minimo (esercizio).

Esempio 3 $\qquad \min \left\{ \int_0^1 \sin(\dot u)\, dx \; : \; u(0)=0, \; u(1)=77 \right\}$

Come sempre $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 [\sin(\dot u + t\dot v) - \sin \dot u]\, dx \} = \int_0^1 \frac{\sin(\dot u + t\dot v) - \sin \dot u}{t}\, dx$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 [\sin \dot u \cdot \cos(t\dot v) + \cos \dot u \cdot \sin(t\dot v) - \sin \dot u]\, dx$$

$$= \lim_{t\to 0} \int_0^1 \Big[\sin \dot u \underbrace{\boxed{\frac{[\cos(t\dot v)-1]}{t}}}_{\to\, 0} + \cos \dot u \underbrace{\boxed{\frac{\sin(t\dot v)}{t}}}_{\to\, \dot v}\Big]\, dx$$

$= \int_0^1 (\cos \dot u)\cdot \dot v \, dx$. Per parti...

$$= [\cos \dot u(x) \cdot v(x)]_0^1 + \int_0^1 \sin \dot u(x) \cdot \ddot u(x) \cdot v(x)\, dx$$

Eq. di Eulero

$$\int_0^1 \sin \dot u(x) \cdot \ddot u(x) \cdot v(x)\, dx = 0 \qquad \forall v \in \ldots$$

... Ancora una volta viene la retta. Assolutamente NO !!!

Idea: il minimo NON esiste e l'inf è -1, che meno non si può. Uso 2 pendenze in cui $\sin(\dot u) = -1$ e faccio la spezzata.

Il costo dei raccordi è piccolo a piacere!