# SSSUP 2012 - LEZIONE 13

Titolo nota 06/03/2012

$\boxed{\text{CALCOLO DELLE VARIAZIONI}}$ $X$ insieme, $f: X \to \mathbb{R}$

$\min\{f(x) : x \in X\}$

<u>Problemi con funzionali integrali</u> $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$$\min\left\{\int_a^b \varphi(x, u(x), \dot{u}(x))\,dx \;:\; u \in X\right\}$$

dove $X$ = certo insieme di funzioni $u : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\varphi$ = funzione data

Più in generale possiamo considerare $\underbrace{\int_a^b \varphi(x, u, \dot{u}(x), \ddot{u}(x), \dots, D^{(k)}u(x))\,dx}_{F(u)}$

Input: $u \in X$ = spazio di funzioni

Output: $F(u) \in \mathbb{R}$

—o—o—

- Metodi indiretti: candidati + botta di fortuna.
- Metodi diretti: Weierstrass $\to$ esistenza $\to$ candidati $\to$ minimo

<u>Esempio</u> $\min\{\underbrace{x^2+y^2+3x-2y}_{f(x,y)} : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

<u>Metodo diretto</u>

① $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = +\infty \Rightarrow$ Weierstrass generalizzato $\Rightarrow$ esistenza

② So che il minimo sarà in uno dei p.ti in cui $\nabla f = 0$

$\nabla f(x,y) = (2x+3, 2y-2) = 0 \iff (x,y) = (-\frac{3}{2}, 1)$

Essendo unico è per forza il p.to di minimo.

Metodo indiretto $\qquad \nabla f(x,y) = 0 \iff (x,y) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

Sostituisco

$$f\left(-\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{9}{4} + 1 - \frac{9}{2} - 2 = -\frac{9}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$$

Sarà vero che $f(x,y) \geq -\frac{13}{4}$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ?

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y = \underbrace{x^2 + 3x + \frac{9}{4}} - \frac{9}{4} + \underbrace{y^2 - 2y + 1} - 1$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 - \frac{13}{4} \geq -\frac{13}{4}$$ con il segno

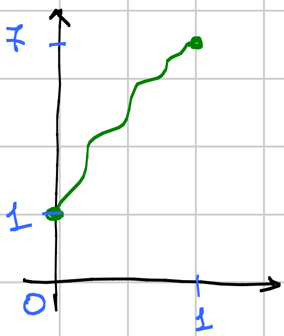
di $=$ che vale se e solo se $x = -\frac{3}{2}$ e $y = 1$.

— o — o —

<u>Esempio 0</u> $\qquad \min \Big\{ \underbrace{\int_0^1 \dot{u}^2(x)\,dx}_{F(u)} : u \in \underbrace{C^1([0,1])}_{X} \Big\}$

È evidente che $\min = 0$ e i p.ti di minimo sono tutte le $u$ costanti.

<u>Esempio 1</u> $\qquad \min \Big\{ \underbrace{\int_0^1 \dot{u}^2(x)\,dx}_{F(u)} : \underbrace{u \in C^1([0,1]),\ u(0) = 1,\ u(1) = 7}_{X} \Big\}$

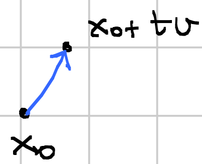



Il metodo indiretto richiede di calcolare la "derivata" o il "gradiente" di $F$ rispetto ad $u$.

<u>Parentesi</u>. Sia $X$ uno spazio vettoriale, e sia $F : X \to \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in X$.

Dato un qualunque $v \in X$, posso provare a calcolare

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}$$



Se esiste è la derivata direzionale di $F$ nel p.to $x_0$ rispetto alla direzione $v$. Qui si chiama DIFFERENZIALE SECONDO GATEAUX.

<u>Teorema</u> (facile facile) Se $x_0$ è un p.to di minimo (o di max) per $F: X \to \mathbb{R}$, allora tutte le derivate direzionali di $F$ in $x_0$, SE ESISTONO, sono nulle.

<u>Achtung!</u> Può essere che $x_0$ è p.to di minimo e tutte le derivate direzionali non esistono.

<u>Oss.</u> Il limite è un limite in $\mathbb{R}$. Ho usato solo che $X$ è uno spazio vettoriale.

Più in generale, se anche $X$ <u>non</u> è uno spazio vettoriale, possiamo considerare una qualunque CURVA $\gamma: (-\delta, \delta) \to X$ con $\gamma(0) = x_0$, poi considerare $F(\gamma(t)) : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ per cui ha senso provare a calcolare la derivata per $t = 0$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(\gamma(t)) - F(x_0)}{t}$$

Se esiste, è la "derivata" di $F$ in $x_0$ lungo la curva $\gamma(t)$.

<u>Teorema</u> Se $x_0$ è di minimo per $F$, allora tutte le derivate lungo curve, se esistono, sono nulle.

—o—o—

Tornando all'esempio 1, prendo
- una $u$ in $X$ (p.to in cui calcolare la derivata)
- una qualunque $v \in C^1([0,1])$ con $v(0) = v(1) = 0$ (direzione)

Calcolo (se esiste)

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_0^1 (\dot{u} + t\dot{v})^2 dx - \int_0^1 \dot{u}^2 dx \right\}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \left( \cancel{\dot u^2} + 2t\,\dot u \dot v + t^2 \dot v^2 - \cancel{\dot u^2} \right) dx = \lim_{t \to 0} \int_0^1 (2 \dot u \dot v + t \dot v^2) dx$$

$$= \lim_{t\to 0} 2 \int_0^1 \dot u \dot v \, dx + \underbrace{t \int_0^1 \dot v^2 dx}_{\downarrow \atop 0} = 2 \int_0^1 \dot u \dot v \, dx$$

Quindi: SE $u$ è un p.to di minimo per $F(u)$, allora DEVE SUCCEDERE che

$$\boxed{\int_0^1 \dot u(x) \dot v(x) \, dx = 0 \quad \text{per ogni } v \in C^1([0,1]) \text{ t.c. } v(0) = v(1) = 0}$$

EQUAZIONE DI EULERO: tutte le derivate direzionali $=0$

Facciamo finta che $u$ sia $C^2([0,1])$. Integrando per parti abbiamo che

$$0 = \int_0^1 \dot u(x) \dot v(x) \, dx = \underbrace{\left[ \dot u(x) v(x) \right]_0^1}_{\substack{=0 \text{ perché } v \\ \text{è nulla al} \\ \text{bordo}}} - \int_0^1 \ddot u(x) v(x) \, dx$$

Nuova versione dell'eq. di Eulero: se $u \in C^2$ è un p.to di min, allora

$$\int_0^1 \ddot u(x) v(x) \, dx = 0 \qquad \forall v \in C^1 \text{ t.c. } v(0) = v(1) = 0.$$

**Lemma fondamentale** Sia $[a,b]$ un intervallo, e sia $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che

$$\int_a^b g(x) \cdot f(x) \, dx = 0 \qquad \text{per ogni } f \in C^1 \text{ con } f(a) = f(b) = 0$$

Allora $g(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$

Dim: supponiamo per assurdo che $\exists\, x_0 \in (a,b)$ t.c. $g(x_0) > 0$.
Allora per continuità $\exists\, \delta > 0$ t.c. $g(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

L'unica "seccatura" è fare la $f(x)$ di classe $C^1$.


Oss. Vale lo stesso lemma se impongo la condizione per ogni $f \in C^\infty$...

—o—o—

Tornando all'esempio 1, abbiamo ottenuto che
$u$ p.to di minimo e $C^2 \Rightarrow \ddot{u} = 0 \Rightarrow u$ è la retta

Sia ora $u$ la retta buona $u(x) = 6x+1$.
Prendo una qualunque altra $w \in X$, che posso scrivere come
$w = u + v$ con $v$ che soddisfa $v(0) = v(1) = 0$. Allora

$$F(w) = F(u+v) = \int_0^1 (\dot{u}+\dot{v})^2\, dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \dot{u}^2\, dx}_{F(u)} + \underbrace{2\int_0^1 \dot{u}\,\dot{v}\, dx}_{= 0} + \underbrace{\int_0^1 \dot{v}^2\, dx}_{\geq 0}$$

Il centrale è 0 sia per l'eq. di Eulero, sia per calcolo diretto

$$\int_0^1 \dot{u}(x)\,\dot{v}(x)\, dx = 6\int_0^1 \dot{v}(x)\, dx = 6\,[v(1) - v(0)] = 6\,(0-0) = 0.$$

—o—o—