SSSUP 2012 — LEZIONE 12

Titolo nota 02/03/2012

<u>Teorema</u> (HEINE – CANTOR) Sia X uno spazio metrico compatto, e sia $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Allora f è uniformemente continua.

$\boxed{\text{Dim}}$ Ipotesi: per ogni $x \in X$, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ t.c.

$$d(x,y) \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \qquad (\delta \text{ dipende da } \varepsilon, x)$$

Tesi: per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ t.c.

$$d(x,y) \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \qquad (\delta \text{ dipende solo da } \varepsilon)$$

$\boxed{\text{Via compattezza per successioni}}$ Per assurdo. Supponiamo che f non sia uniformemente continua. Allora $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ per cui nessun $\delta > 0$ va bene. In particolare non vanno bene i δ del tipo $\frac{1}{k}$, cioè esistono x_k, y_k tali che

$$d(x_k, y_k) \le \frac{1}{k} \qquad \underline{\text{MA}} \qquad |f(x_k) - f(y_k)| \ge \varepsilon_0$$

A meno di s.successioni abbiamo che $x_{n_k} \to x_\infty$, $y_{n_k} \to y_\infty$.
Ora $x_\infty = y_\infty$ perché

$$d(\boxed{x_{n_k}}, \boxed{y_{n_k}}) \le \boxed{\frac{1}{n_k}}$$

$$d(x_\infty, y_\infty) \le 0$$

Ma allora $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ge \varepsilon_0$

$$0 = |f(x_\infty) - f(y_\infty)| \ge \varepsilon_0 > 0 \quad \Rightarrow \text{assurdo.}$$

$\boxed{\text{Via compattezza per ricoprimenti}}$ Fisso $\varepsilon > 0$. Devo trovare un $\delta > 0$ universale. Per ipotesi per ogni $x \in X$ trovo un δ_x, cioè un δ dipendente da x, tale che $d(x,y) \le \delta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$.
Ora $B(x, \delta_x)$ costituiscono un ricoprimento aperto di X, che quindi ammette un sottoricoprimento finito.

$$B(x_1, \delta_1), \quad B(x_2, \delta_2), \ldots, \quad B(x_k, \delta_k)$$

Dico che $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k\} \cdot \frac{1}{2}$ è quello che va bene.
Infatti, dati x e y in X con $d(x,y) \leq \delta$, è facile verificare che x e y stanno in una stessa pallettina...

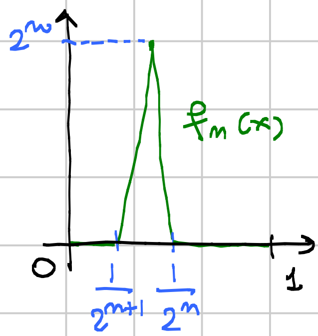
— o — o —

Passaggio al limite negli integrali.

Problema generale Siano f_n una succ. di funzioni continue in un intervallo $[a,b]$. Supponiamo che $f_n(x) \to f_\infty(x)$ in qualche senso. Possiamo concludere che

$$\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f_\infty(x)\, dx \quad ?$$

Fatto 1 La convergenza puntuale NON basta. Prendiamo $[a,b] = [0,1]$.
e $f_n(x)$ fatte così come in figura



Si verifica che
- $f_n(x) \to 0$ puntualmente
  (banale per $x=0$, ogni $x>0$ è definitivamente a dx del triangolo)
- l'integrale delle $f_n(x)$ = area triangolo $= \frac{1}{4}$

ma $\int$ del limite $= 0$.

Fatto 2 La convergenza uniforme basta, almeno se le approssimanti sono continue. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo che definitivamente si ha che

$$f_\infty(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f_\infty(x) + \varepsilon \qquad \forall x \in [a,b],$$

quindi

$$\int_a^b f_\infty(x)\, dx + \varepsilon(b-a) \leq \int_a^b f_n(x)\, dx \leq \int_a^b f_\infty(x)\, dx + \varepsilon(b-a)$$

il che dice che $\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f_\infty(x)\, dx$

Esercizio (delicato) Sia $f_n(x)$ una succ. di funzioni integrabili secondo Riemann. Supponiamo che $f_n(x) \to f_\infty(x)$ uniformemente.
Allora $f_\infty(x)$ è integrabile secondo Riemann e vale il passaggio al limite.

Fatto 3 (Non dimostrato) Convergenza puntuale + limitatezza (equilimitatezza) bastano.

— o — o —

Convergenza uniforme e composizioni. Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua
Siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ delle funzioni continue che convergono uniformemente ad una certa $f_\infty : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Cosa posso dire di $g(f_n(x))$?

È ovvio che $g(f_n(x)) \to g(f_\infty(x))$ puntualmente per la continuità di g. Sarà uniforme ?
Supponiamo che g sia uniformemente continua. Allora
- fisso $\varepsilon > 0$ e so che esiste $\delta > 0$ t.c.

$$|y_1 - y_2| \leq \delta \Rightarrow |g(y_1) - g(y_2)| \leq \varepsilon$$

- per la convergenza uniforme delle $f_n(x)$ sappiamo che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \delta \qquad \forall x \in [a,b] \quad \forall n \geq n_0$$

Ma allora per ogni $n \geq n_0$ e ogni $x \in [a,b]$ avremo che

$$|g(\underbrace{f_n(x)}) - g(\underbrace{f_\infty(x)})| \leq \varepsilon$$

distano meno di δ

Ora l'immagine di $f_\infty(x)$ è un compatto perché $[a,b]$ è compatto (quello che conta è che l'immagine è contenuta in un intervallo $[A,B]$ con ad esempio $A = \min$ $B = \max$), quindi definitivamente l'immagine di f_n è contenuta in $[A-1, B+1]$ quindi mi serve l'uniforme continuità di g solo in $[A-1, B+1]$, ma questo è un compatto, dunque l'uniforme continuità segue dalla continuità.

<u>Esercizio</u> Supponiamo che $f_n \to f_\infty$ uniformemente in $[a,b]$. Estendiamo le f_n come costanti per $x \leq a$.
Allora posto
$$f_n\left(x-\frac{1}{n}\right) = g_n(x)$$
si ha che
$$g_n(x) \to f_\infty(x) \quad \text{uniformemente in } [a,b]$$

Notare che questo fatto generale sistema il passaggio al limite nell'integrale per il teo. di esistenza per eq. diff.

<u>Esercizio</u> Trovare l'errore nella 2ª dim. di Heine - Cantor ed aggiustarlo.

— o — o —