SSSUP 2012 — LEZIONE 11

Titolo nota 02/03/2012

Teorema di compattezza in spazi metrici

Definizioni. Uno spazio metrico (X, d) si dice

- compatto per successioni se per ogni successione x_n in X esiste una s.succ. x_{n_k} che converge ad un certo $x_\infty \in X$
- compatto per ricoprimenti se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito, cioè se per ogni famiglia $\{U_a\}_{a \in A}$ con U_a aperto per ogni $a \in A$ tale che $\bigcup_{a \in A} U_a \supseteq X$ si ha che esistono $a_1, \dots, a_k \in A$ tali che

$$\bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i} \supseteq X$$

Oss. Entrambe le definizioni si applicano in realtà in spazi topologici

Oss. Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice compatto in uno dei 2 sensi, quando è compatto come spazio metrico o topologico visto come sottospazio

Esempio $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ è compatto nei 2 sensi. Non è vero che ogni ricoprimento chiuso ammette un sottoricoprimento finito

- Modo 1 $\quad [0,1] = \bigcup_{x \in [0,1]} \{x\}$ ← ricoprimento chiuso senza sotto-ricoprimenti finiti
- Modo 2

$U_k = \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]$ e poi aggiungo $\{0\}$

Teorema Per uno spazio metrico X i seguenti fatti sono equivalenti

(1) X è compatto per ricoprimenti,

(2) X è compatto per successioni,

(3) X è completo e totalmente limitato,

(4) X è completo e totalmente limitato in senso debole

Ricordo
- X è totalmente limitato se per ogni $r>0$ esiste un numero finito di p.ti $x_1, \dots, x_k$ t.c. $\bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, r) = X$.
In maniera equivalente: ogni p.to $x \in X$ dista $\leq r$ da almeno uno degli x_i
- X è totalmente limitato in senso debole se per ogni $r>0$ esiste un compatto $K \subseteq X$ (compatto in qualunque senso) tale che ogni p.to $x \in X$ dista $\leq r$ da almeno un p.to di K.

$\boxed{\text{Dim}}$ $\boxed{(3) \Rightarrow (4)}$ Banale (gli insiemi finiti sono compatti)

$\boxed{(3) \Rightarrow (2)}$ Prendo una successione x_n e voglio trovare una s.succ. convergente. Per la completezza basta che trovo una s.succ di Cauchy. Costruisco sottoinsiemi $\mathbb{N} = A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq A_4 \dots$ in questo modo
- $A_1 = \mathbb{N}$
- A_2 = ricopro X con un numero finito di palle di raggio $\frac{1}{2}$ (posso per la totale limitatezza) e avrò che $x_n \in$ una di queste palle per infiniti indici n. Allora A_2 è l'insieme di questi indici
- A_{k+1} = ricopro ... raggio $\frac{1}{k+1}$ (posso ...) e avrò che $x_n \in$ una di queste palle per infiniti indici $n \in A_k$. Allora A_{k+1} ....

Ora scelgo la succ. di indici n_k in maniera tale che $n_i \in A_i$ e $n_{i+1} > n_i$ (posso perchè tutti gli A_i sono infiniti).
È facile verificare che x_{n_i} è di Cauchy

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Sia x_n una succ. di Cauchy. Per ipotesi (2) questa ha una s.succ. convergente. Ma allora converge tutta (fatto generale: se una succ. di Cauchy ha una s.succ. convergente, allora converge essa stessa).

Così ho dimostrato che (2) $\Rightarrow$ completo

Dimostriamo ora che (2) $\Rightarrow$ totalmente limitato.

Fisso raggio $r>0$. Definisco x_n in questo modo

- scelgo x_1 a caso
- scelgo x_{k+1} in modo che disti $>r$ da tutti i precedenti $x_1, \dots, x_k$

Se strada facendo mi blocco, cioè non riesco a trovare x_{k+1}, vuol dire che $\bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, r) \supseteq X$

La successione x_n <u>non</u> è di Cauchy, perché $d(x_n, x_m) > r$ per ogni n ed m. Quindi non può avere s.succ. convergenti, in quanto ogni s.succ avrebbe la stessa proprietà.

<u>Lemma</u> (Raggio magico) Sia X compatto per successioni, e sia $\{U_a\}_{a\in A}$ un ricoprimento aperto.
Allora $\exists\, r>0$ con questa proprietà:
per ogni $x \in X$, esiste $a \in A$ tale che $B(x,r) \subseteq U_a$.

Dato il lemma, vediamo che $\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$.

Prendo un qualunque ricoprimento $\{U_a\}_{a\in A}$ di X. Voglio trovare un s.ric. finito.

<u>Step 1</u> Prendo il raggio r magico dato dal lemma

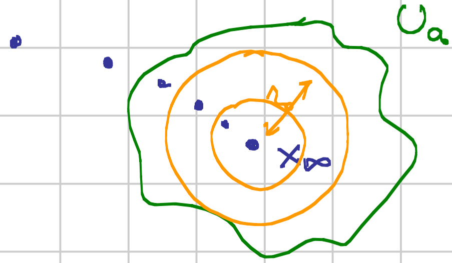
<u>Step 2</u> Prendo $x_1, \dots, x_k$ in maniera che $B(x_i, r)$ per $i=1,\dots,k$ ricoprano tutto X (uso che (2) $\Rightarrow$ (3), quindi X è totalmente limitato)

<u>Step 3</u> Per il lemma, ciascuna di queste pallettine $B(x_i, r)$ è contenuta in un certo U_{a_i}. Questo è il sottoricoprimento finito cercato.

$\boxed{\text{Dim. lemma}}$ Supponiamo che non sia vero. Allora tutti gli $r = \frac{1}{k}$ vanno male, cioè per ogni k esiste un p.to x_k tale che $B(x_k, \frac{1}{k})$ <u>non</u> è contenuta in nessuno degli A_i

~~Per~~ Da (2) si ha che x_k ha una s.succ. convergente, che per semplicità non rinominiamo.

Detto per bene: $x_k \to x_\infty$.



- $\exists\, r_0 > 0\ \exists\, a \in A$ t.c. $B(x_\infty, r_0) \subseteq U_a$
- Definitivamente $x_k \in B(x_\infty, \frac{r_0}{2})$
- Per tutti gli x_k precedenti il raggio $\frac{r_0}{2}$ va bene, il che è contro l'ipotesi che $\frac{1}{k}$ non andasse bene.

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Data una succ. x_n, voglio trovare una s.succ. convergente.

Osservazione: se esiste un p.to $x_\infty \in X$ t.c. per ogni r si ha che $B(x_\infty, r)$ contiene infiniti elementi della succ., allora esiste una s.succ. $x_{n_k} \to x_\infty$.

Quindi, se non esiste una s.succ. convergente, vuol dire che per ogni $x \in X$ esiste una pallina $B(x, r)$ aperta, con raggio eventualmente dipendente da x, che tocca solo un numero finito di elementi della successione.

Ma tutte queste pallettine costituiscono un ricoprimento aperto di X, che dunque ammette un s. ricopr. finito.

Quindi ho un numero finito di palle, ciascuna delle quali contiene solo un numero finito di x_n, il che è impossibile

<u>Esercizio</u> Dimostrare che (4) $\Rightarrow$ uno qualunque degli altri 3...