SSSUP 2012 — LEZIONE 10

Titolo nota 17/02/2012

Teorema di esistenza (e basta) per equazioni differenziali

In ipotesi semplificate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua
$t_0 \in \mathbb{R}$ dato, $u_0 \in \mathbb{R}$ dato.

Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

ha almeno una soluzione locale, cioè esiste $\delta > 0$ ed esiste $u : [t_0, t_0+\delta] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 che lo risolve.

Perché ipotesi semplificate? ① f potrebbe essere definita solo in un intorno di u_0

② potrebbe essere un sistema ($u_0 \in \mathbb{R}^n$)

③ potrebbe essere un'eq. non autonoma $u' = f(t, u)$.

$\boxed{\text{Step 1}}$ Ho risolto il problema se trovo una funzione u che soddisfa la formulazione integrale

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(u(s))\, ds \qquad \forall t \in [t_0, t_0+\delta]$$

Esattamente come l'altra volta.

$\boxed{\text{Step 2}}$ Fisso n intero > 0 e procedo a tratti lunghi $\frac{1}{n}$

$t_0 \quad t_0+\frac{1}{n} \quad t_0+\frac{2}{n}$

definendo una soluzione approssimata $u_n(t)$.
Inizio ponendo $u_n(t) = u_0$ per ogni $t \le t_0$

Per ogni $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$ pongo

$$u_n(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\underbrace{u_n(s - \tfrac{1}{n})}_{\text{coinvolge valori di } u_n \text{ per } t \leq t_0}) \, ds$$

Per ogni $t \in [t_0 + \frac{1}{n}, t_0 + \frac{2}{n}]$ pongo la stessa cosa

$$u_n(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\underbrace{u_n(s - \tfrac{1}{n})}_{\text{coinvolge valori di } u_n(t) \text{ per } t \leq t_0 + \frac{1}{n}}) \, ds$$

Di questo passo ottengo una soluzione approssimata $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Obiettivo:

1. trovare un $\delta > 0$ tale che in $[t_0, t_0 + \delta]$ siano verificate le ipotesi di Ascoli-Arzelà
2. prendere il limite $u_\infty(t)$ di una opportuna s.succ. e sperare che $u_\infty(t)$ sia soluzione del problema iniziale.

Il p.to 2 è ragionevole che succeda perché la formulazione integrale è stabile per passaggio al limite (mentre non lo sarebbe quella differenziale!!)

$\boxed{\text{Step 3}}$ Sistemazione del p.to (1). Prendo l'intervallo $[u_0 - 1, u_0 + 1]$. Questo sarà X. Pongo

$$L := \max\{|f(x)| : x \in [u_0 - 1, u_0 + 1]\}.$$

Prendo $\delta := \frac{1}{L}$.

Dico che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ si ha che

$u_n(t) \in [u_0 - 1, u_0 + 1]$ → garantisce la compattezza a t fisso

$|u_n'(t)| \leq L$ → garantisce che tutte le $u_n(t)$ sono Lipschitziane con costante L indip. da n.

Per dimostrare la 1ª basta osservare che

$$|u_n(t) - u_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(u_n(s-\tfrac{1}{n}))\,ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(u_n(s-\tfrac{1}{n}))|}_{\text{se sapessi che è } \leq L \text{ avrei}}\,ds$$

$$\leq L\,(t-t_0)$$

$$\leq L\,\delta$$

$$= L \cdot \frac{1}{L} \leq 1$$

Il ritardo mi salva dal "mangiarmi la coda". Formalmente la dimostrazione viene fatta per induzione sui sottointervalli $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ (n fisso, induzione su k).

Per dimostrare che $|u_n'(t)| \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $t \in [t_0, t_0+\delta]$ basta osservare che

$$u_n'(t) = f(\underbrace{u_n(t-\tfrac{1}{n})}_{\text{sta in } [u_0-1,\, u_0+1]}).$$