SSSUP 2012 — LEZIONE 09

Teoremi di esistenza per equazioni differenziali (anche con derivate parziali)

$\nearrow$ Via punto fisso (contrazione in uno spazio metrico completo)

$\searrow$ Via compattezza: si introducono delle "quasi-soluzioni" e si fa vedere che convergono ad una sol. vera

Teorema di ASCOLI–ARZELÀ Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia (X, d) uno spazio metrico. Sia f_n una successione di funzioni

$$f_n : I \to X$$

Supponiamo che

(i) per ogni $t \in I$ si ha che la successione $\{f_n(t)\}$ è relativamente compatta, cioè ogni sua sottosuccessione ammette a sua volta una sottosuccessione convergente, COMPATTEZZA A t FISSATO

(ii) le funzioni $f_n(t)$ sono <u>equicontinue</u> EQUICONTINUITÀ

Allora f_n ammette una s.succ. convergente UNIFORMEMENTE, cioè esiste una successione n_k strett. crescente di interi positivi, ed esiste $f_\infty : I \to X$ tale che $f_{n_k} \to f_\infty$ uniformemente.

<u>Oss.</u> La funzione limite f_∞, essendo lim. unif. di roba continua, è a sua volta continua.

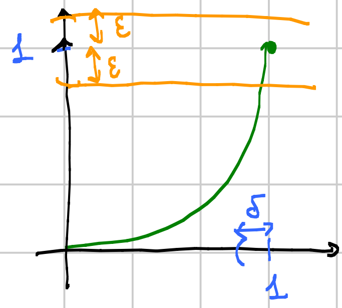
<u>Def.</u> Siano $f_n : I \to X$ delle funzioni ($I \subseteq \mathbb{R}$ e (X, d) è metrico). Si dice che sono una successione EQUICONTINUA se $\forall t_0 \in I$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che

$$d(f_n(t), f_n(t_0)) \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } t \in I \text{ t.c. } |t - t_0| \leq \delta.$$
$$\forall n \in \mathbb{N}.$$

$[n \in \mathbb{N}, \ |t - t_0| \leq \delta \implies d(f_n(t), f_n(t_0)) \leq \varepsilon]$

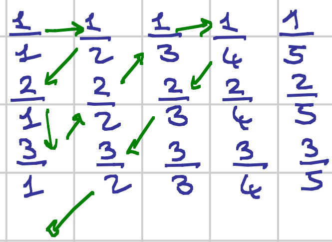
<u>Oss.</u> La cosa importante è che c'è un δ che va bene per ogni $n \in \mathbb{N}$.

<u>Esempio</u> Se prendo $X = \mathbb{R}$, $f(t) = t^n$, $I = [0,1]$ non si tratta di funzioni equicontinue. Il problema è in $t_0 = 1$, dove sono sempre più pendenti, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ servirebbe un δ sempre più piccolo.



<u>Oss.</u> La definizione di equicontinuità si può dare per una qualunque successione di funzioni tra due spazi metrici.

$\boxed{\text{Def.}}$ Un insieme si dice <u>numerabile</u> se può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.
Ad esempio, $\mathbb{Q}$ è numerabile perchè c'è il serpentone



Un sottoinsieme $D \subseteq I$ si dice <u>denso</u> se per ogni $t \in I$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste $d \in D$ t.c. $|t-d| \leq \varepsilon$. Equivalentemente: se $I \subseteq \overline{D}$.
(La definizione si estende a sottoinsiemi D di un qualunque spazio topologico)

$\boxed{\text{Step 1}}$ Considero un qualunque sottoinsieme $D \subseteq I$ che sia DENSO e NUMERABILE

<u>Oss.</u> ci sono vari modi di dimostrare che tali sottoinsiemi esistono
① prendere $D := I \cap \mathbb{Q}$,
② divido I in 2 parti uguali e prendo un pto per parte, poi
" " " 3 " " " "
" " " 4 " "
e così via.

<u>Esercizio</u> Ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ contiene un denso D finito o numerabile.

$\boxed{\text{STEP 2}}$ Esiste una sottosuccessione f_{n_k} tale che $f_{n_k}(t)$ converge a qualcosa per ogni $t \in D$.

Per farlo:

- numero gli elementi di D: $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots$
- per l'ipotesi (i) esiste una s.succ. f_{n_k} t.c. $f_{n_k}(d_1) \to$ qualcosa
- " " " " " " $f_{n_{k_i}}$ della precedente tale che $f_{n_{k_i}}(d_2) \to$ qualcosa
- e così via...

Concludo con il $\boxed{\text{PROCEDIMENTO DIAGONALE}}$

Schema generale:

* ho una successione in cui succede una certa cosa (P_1)

* " " sottosucc. della precedente in cui succede (P_2)

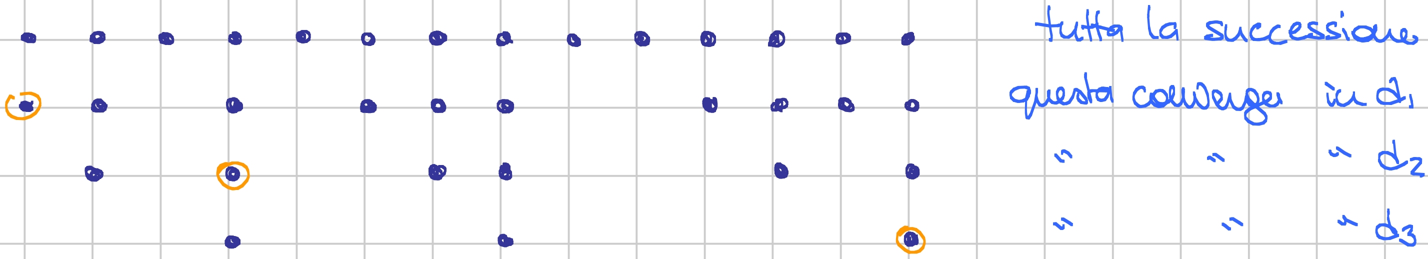
⋮

(P_{k+1}) succede in una s.succ. di quella in cui vale (P_k)

Come trovare una sottosuccessione in cui succedono tutte le (P_i)?

Basta prendere il 1° el. della prima succ., il 2° elemento della 2ª succ, e così via !!!!

Quella che ottengo è una s.succ. di tutte quante, quindi gode di tutte quante le proprietà



$\boxed{\text{Step 3}}$ Sia f_n la sottosuccessione (ho eliminato i termini inutili) che converge a qualcosa per ogni $d \in D$.

Voglio dimostrare che $f_n(t)$ converge a qualcosa per ogni $t \in I$, senza ulteriormente estrarre sottosuccessioni

Fisso $t_0 \in I$. Se dimostro che $f_n(t_0)$ è di Cauchy ho finito perché

- per l'ipotesi (i) ho che $f_n(t_0)$ ha una s.succ. convergente

- essendo di Cauchy, se ha una s.succ. convergente, allora converge tutta.

Obiettivo: dimostrare che $f_n(t_0)$ è di Cauchy.

Prendo $\varepsilon > 0$, prendo il $\delta > 0$ dell'equicontinuità corrispondente ad $\varepsilon/3$, prendo $d \in D$ tale che $|t_0 - d| \leq \delta$.

Osservo che $f_n(d)$ è di Cauchy perché già so che converge.

Prendo l'n_0 corrispondente a questa succ. di Cauchy e $\frac{\varepsilon}{3}$.

Allora per ogni $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ abbiamo che

$$
\begin{aligned}
d(f_n(t_0), f_m(t_0)) \leq\ & d(f_n(t_0), f_n(d)) + && \leq \tfrac{\varepsilon}{3} \\
& + d(f_n(d), f_m(d)) + && \leq \tfrac{\varepsilon}{3} \\
& + d(f_m(d), f_m(t_0)) && \leq \tfrac{\varepsilon}{3} \\
\leq\ & \varepsilon
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Step 4}}$ Ora so che per ogni $t \in I$ si ha che $f_n(t) \to$ qualcosa, che chiamo $f_\infty(t)$.

Dunque $f_\infty(t)$ è il limite puntuale della succ., che in realtà è una s.succ. di quella originaria, $f_n(t)$.

Essendo le singole funzioni continue, resta da dimostrare che la convergenza è uniforme.

<u>Fatto da accettare</u>: supponiamo che l'intervallo I sia chiuso, cioè del tipo $[a,b]$. Allora l'ipotesi (ii) implica in realtà l'EQUI UNIFORME CONTINUITÀ, cioè

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che

$$n \in \mathbb{N},\ |t_1 - t_2| \leq \delta,\ t_1 \text{ e } t_2 \text{ in } I \implies d(f_n(t_1), f_n(t_2)) \leq \varepsilon.$$

Allora si dimostra "facilmente" che $f_n(t) \to f_\infty(t)$ uniformemente.

Sia $\varepsilon > 0$. Prendo $\delta > 0$ che corrisponde ad $\varepsilon/3$ nell'uniforme continuità. Ricopro I con un <u>numero finito</u> di sottointervallini $I_1, \dots, I_k$ di ampiezza $\leq \delta$. In ciascuno di tali sottointervallini individuo un elemento $d_k \in D$.

Ora $f_n(d_i) \to f_\infty(d_i)$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Quindi esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(f_\infty(d_i), f_n(d_i)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{per ogni } n \geq n_0, \ i = 1, \dots, k$$

(qui è fondamentale che i ha un numero finito di possibili valori). Preso un qualunque t, questo starà in un certo intervallino I_j, e quindi per $n \geq n_0$ si ha che

$$\begin{aligned} d(f_\infty(t), f_n(t)) \leq\ & d(f_\infty(t), f_\infty(d_j)) + && \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ & + d(f_\infty(d_j), f_n(d_j)) + && \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ & + d(f_n(d_j), f_n(t)) && \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ perché } |d_j - t| \leq \delta \end{aligned}$$

Perché il termine della prima riga è $\leq \frac{\varepsilon}{3}$?

Dall'uniforme equicontinuità si ha che

$d(f_n(t), f_n(d_j)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ in quanto t e d_j sono vicini.
Passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene la stima voluta.

—o—o—

<u>Esercizio</u> Vedere lo stesso teorema per funzioni $f_n : Y \to X$, dove Y è un metrico.
Quali ipotesi dobbiamo fare su Y?