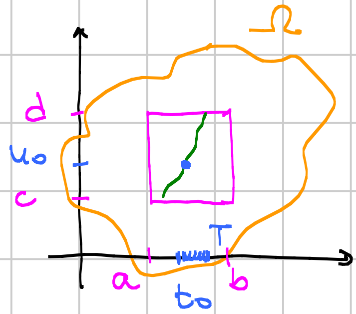
Teorema di esistenza ed unicità per eq. diff.

Consideriamo un problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$



Supponiamo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ sia un aperto, $(t_0, u_0) \in \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e lipschitziana in u uniformemente rispetto a t.
Allora il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione.

Dim. Mi riduco ad un rettangolo che contiene il dato iniziale. A tal fine considero un rettangolo $[a,b] \times [c,d] \subseteq \Omega$ con $t_0 \in (a,b)$ e $u_0 \in (c,d)$.
Per l'ipotesi su f sappiamo che $\exists L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \le L|u_1 - u_2| \qquad \forall (t,u_1,u_2) \in [a,b] \times [c,d]^2$$

Voglio trovare
- un $T \in [t_0, b]$
- una funzione $u: [t_0, T] \to [c,d]$ che risolve l'equazione

Passo 1 "Da equazione differenziale ad equazione integrale".
Una funzione $u(t)$ risolve l'equazione + cond. iniziale se e solo se

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \qquad \text{per ogni } t \in [t_0, T].$$

Supponiamo che u verifichi l'equazione differenziale. Allora

$$u(t) - u_0 \overset{\text{cond. iniz.}}{=} u(t) - u(t_0) \overset{u \text{ è int. di } u'}{=} \int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds \underset{\text{uso eq. diff.}}{=} \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds$$

Viceversa: supponiamo che u verifichi l'equazione integrale. Allora $u(t_0) = u_0$, cioè u verifica la condizione iniziale. Inoltre per il teo. fondamentale del calcolo integrale si ha che

$$u'(t) = f(t, u(t)).$$

Vantaggi della formulazione integrale:

1. contiene al suo interno sia l'eq. diff., sia dato iniziale
2. è equivalente al problema di Cauchy
3. richiede solo la continuità di u, perché poi la derivabilità è una conseguenza.

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Consideriamo l'insieme delle funzioni continue

$$f: [t_0, T] \longrightarrow [c, d]$$

Questo è uno spazio di Banach che indichiamo con $X_{[t_0,T],[c,d]}$.

Consideriamo, per ogni $u \in X_{\dots}$, la funzione

$F(u)$ definita da $\quad [F(u)](t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds$

Quindi F prende in input funzioni $[t_0, T] \to [c, d]$ e fornisce in output funzioni $[t_0, T] \to \mathbb{R}$.

Ora l'equazione integrale ha una soluzione u se e solo se $F(u) = u$, cioè se e solo se F ha un p.to fisso. Programma

1. mostrare che se T è abbastanza vicino a t_0, allora $F: X_{\dots} \to X_{\dots}$ (cioè nello stesso spazio)
2. mostrare che F, per T abbastanza piccolo, è una contrazione.

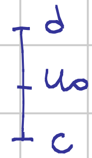
Verifica di (1): sia $M := \max\{ |f(t,u)| : (t,u) \in [a,b] \times [c,d] \}$

Allora

$$\left| [F(u)](t) - u_0 \right| = \left| \int_{t_0}^{T} f(s, u(s))\, ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{T} |f(s,u(s))|\, ds$$

$$\leq M(T - t_0)$$



Basta scegliere $M(T-t_0) \leq \min\{d - u_0, u_0 - c\}$ e siamo sicuri che

$$F : X_{[t_0,T],[c,d]} \longrightarrow X_{[t_0,T],[c,d]}$$

Da questo momento in poi, F manda uno spazio in sè.

Verifica di (2) Devo verificare che per T abbastanza vicino a t_0 si ha che F è una contrazione, cioè che esiste $\nu < 1$ t.c.

$$\mathrm{dist}(F(u_1), F(u_2)) \leq \nu \, \mathrm{dist}(u_1, u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in X_{...}$$

Per ogni $t \in [t_0, T]$ si ha che

$$\left| [F(u_1)](t) - [F(u_2)](t) \right| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,u_1(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s,u_2(s))\, ds \right|$$

$$= \left| \int_{t_0}^{t} \{ f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s)) \}\, ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} | f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s)) |\, ds$$

(uso unif. Lip.)

$$\leq L \int_{t_0}^{t} |u_1(s) - u_2(s)|\, ds$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} \mathrm{dist}(u_1, u_2)\, ds$$

$$\leq L(T - t_0)\, \mathrm{dist}(u_1, u_2)$$

Abbiamo così dimostrato che, per ogni $t \in [t_0, T]$, si ha che

$$\left| [F(u_1)](t) - [F(u_2)](t) \right| \leq L\,(T-t_0)\,\text{dist}\,(u_1, u_2)$$

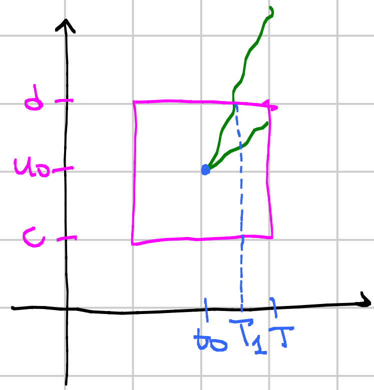
Facendo il sup rispetto a t otteniamo che

$$\text{dist}\,(F(u_1), F(u_2)) \leq \boxed{L\,(T-t_0)}\,\text{dist}\,(u_1, u_2)$$

Basta scegliere T in maniera tale che $L\,(T-t_0) < 1$ (ad es. $= \frac{1}{2}$).
Questo completa la dimostrazione.

— o — o —

<u>Oss. sull'unicità</u> Ho dimostrato l'unicità?
$\boxed{\text{NI}}$ Ho dimostrato che esiste un'unica soluzione in $X_{[t_0,T],[c,d]}$ pur di scegliere T come pare a me...



Potrebbe esserci un'altra soluzione che "scappa" da $[c,d]$ prima di T...
Sia T_1 il tempo in cui scappa. Allora avrei 2 soluzioni in

$$X_{[t_0,T_1],[c,d]}$$

ma F è una contrazione anche in questo spazio, perché bastava $T \leq$ qualcosa, quindi se T va bene, anche T_1 va bene.

<u>Esercizio</u> Enunciare e dimostrare il teorema nel caso dei sistemi.
Cosa cambia?
$\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$,
$[c,d]$ = palla chiusa con centro in u_0 e un certo raggio
X = funzioni continue da $[t_0,T]$ a valori nella palla