SSSUP 2012 – LEZIONE 07

Titolo nota 09/02/2012

Convergenza puntuale e uniforme di funzioni

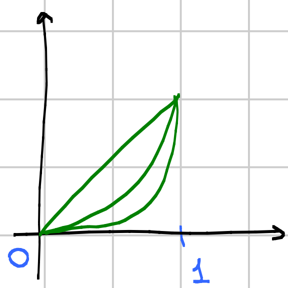
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, e sia (X, d) uno spazio metrico.
Sia $f_n : A \to X$ una successione di funzioni, e sia $f_\infty : A \to X$.

Def. Si dice che $f_n \to f$ PUNTUALMENTE se
$\forall x \in A$ si ha che $f_n(x) \to f_\infty(x)$ (convergenza in X)
Si dice che $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $d(f_n(x), f_\infty(x)) \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_0 \ \forall x \in A$

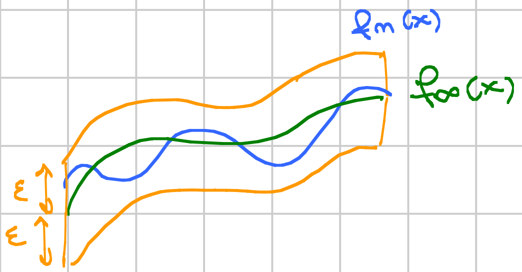
Oss. Convergenza uniforme $\Rightarrow$ convergenza puntuale
$\not\Leftarrow$

Esempio $A = [0,1]$, $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$

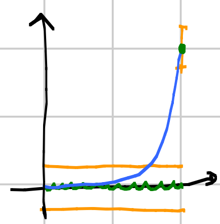
Si verifica che $f_n(x) \to f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$



nel senso della convergenza puntuale.
Convergere uniformemente = "definitivamente cadere in una striscia centrata in f_∞ di ampiezza ε"



Nell'esempio questo non succede



Brutalmente: nella convergenza uniforme c'è un n_0 che va bene per tutti gli $x \in A$.

Oss. La convergenza puntuale la posso definire per funzioni $f_n : A \to X$, dove
- A può essere un insieme qualunque
- X è un qualunque ambiente in cui hanno senso i limiti di successioni.

Per la convergenza uniforme posso spingermi fino a
- A insieme qualunque
- X metrico.

Oss. Se A è un insieme, X è un metrico, allora posso definire una distanza tra funzioni $f : A \to X$, $g : A \to X$ come

$$\underbrace{\text{dist}(f,g)}_{\text{distanza tra le funzioni}} := \sup\{\underbrace{d(f(x),g(x))}_{\text{distanza in } X} : x \in A\}$$

Questa distanza "metrizza" la convergenza uniforme, cioè $f_n \to f_\infty$ uniformemente $\iff \text{dist}(f_n, f_\infty) \to 0$.

Achtung! Affinchè $\text{dist}(f,g)$ sia ben definita occorre che il sup non faccia $+\infty$, il che avviene ad esempio se f e g sono limitate.

Teorema Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo compatto.
Sia (X, d) uno spazio metrico.
Sia $C^0(I; X)$ l'insieme delle funzioni continue $f : I \to X$.
Allora $C^0(I; X)$ è uno spazio metrico rispetto a $\text{dist}(f,g)$
Se X è completo, allora $C^0(I; X)$ è completo.

Dim. Che si tratti di un metrico è banale (esercizio: occhio alla triangolare!)
Perchè è completo? Devo dimostrare: data una qualunque succ. di funzioni di Cauchy rispetto a dist, allora $f_n \to$ ad una

certa $f_\infty \in C^0(I; X)$.

Per ogni $x \in I$ ho che $f_n(x)$ è una succ. di Cauchy in X.

Infatti $d(f_n(x), f_m(x)) \leq dist(f_n, f_m)$.

Questo basta per dire che $f_n(x) \to$ ad un certo valore che chiamo $f_\infty(x)$. Devo dimostrare

① che il limite è continuo

② che la convergenza avviene nel senso di dist

Dim. di ② Sia dato $\varepsilon > 0$. Scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $dist(f_n, f_m) \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$, $m \geq n_0$. Allora per ogni $x \in A$ ho che

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$$

Facendo tendere $m \to +\infty$ ottengo che

$$d(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \varepsilon \qquad \forall x \in I, \ \forall n \geq n_0,$$

il che equivale a dire che $dist(f_n, f_\infty) \leq \varepsilon$.

Dim. di ① Devo dim. che $f_\infty(x)$ è continua. Fisso $x_0 \in I$ e fisso $\varepsilon > 0$. Devo trovare $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| \leq \delta \implies d(f_\infty(x), f_\infty(x_0)) \leq \varepsilon$$

Ora

$$d(f_\infty(x), f_\infty(x_0)) \leq d(f_\infty(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f_\infty(x_0))$$

Scelgo n abbastanza grande in modo che il 1° ed il 3° siano $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ (è possibile perché so che sono $\leq dist(f_\infty, f_n)$)

Fissato un n abbastanza grande, scelgo δ in modo che il 2° sia $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ (posso perché f_n è continua).

— o — o —

Oss. Detto altrimenti, il limite uniforme di funzioni continue è continuo.

Questo NON vale per la convergenza puntuale.

Oss. Supponiamo che X sia un Banach. Allora $C^0(I;X)$ è un Banach rispetto alla norma

$$\|f\|_{C^0(I;X)} := \sup\{\|f(x)\|_X : x \in I\}$$

Fatto generale Data una successione a_n a valori in un Banach X si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_X < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Def. Data una successione di funzioni $f_n: I \to \mathbb{R}$ con $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e f_n continua si dice che $\sum f_n$ converge totalmente se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup\{|f_n(x)| : x \in I\} < +\infty$$

Teorema Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ con $f_n: I \to \mathbb{R}$ continue, si ha che

CONVERGENZA TOTALE $\Rightarrow$ CONVERGENZA UNIFORME

convergenza di una serie di numeri ≥ 0

convergenza di una serie di funzioni, cioè convergenza uniforme della successione delle somme parziali

Dim. Estendiamo l'enunciato a funzioni $f_n: I \to X$ sp. di Banach.
La tesi è dire che $\sum f_n$ converge in $C^0(I;X)$.
Ora

$$\|f_n\|_{C^0(I;X)} = \sup\{\|f_n(x)\|_X : x \in I\}$$

e il fatto generale ci dice che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{C^0(I,X)} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ converge in } C^0(I;X).$$

— o — o —