SSSUP 2012 — LEZIONE 06

<u>Teorema</u> (in $\mathbb{R}$) Sia a_n una successione. Allora

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \implies \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$\boxed{\text{Dim. via ordinamento}}$

$$a_n = |a_n| + a_n - |a_n|$$
$$= |a_n| - (|a_n| - a_n)$$

quindi

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n = \sum_{n\geq 0}^{\infty} |a_n| - \sum_{n\geq 0}^{\infty} (|a_n| - a_n)$$

$\boxed{\text{Se}}$ le 2 serie al RHS convergono, allora converge quella iniziale.
La 1ª serie al RHS converge per ipotesi. Per la 2ª si ha che

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|,$$

quindi la 2ª serie al RHS converge per confronto con la serie di $2|a_n|$ (occhio: posso fare il confronto perché si tratta di serie a termini ≥ 0).

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. via completezza}}$ Devo dim. che la succ. delle somme parziali

$$S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

converge. Per far questo, basta dim. che S_n è di Cauchy. Ora supponiamo $n > m$. Allora

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n|$$
$$= \hat{S}_n - \hat{S}_m,$$

dove $\hat{S}_n := |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$. Ora
$\sum |a_n|$ converge per ipotesi, quindi $\hat{S}_n$ è di Cauchy, quindi dato $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\hat{S}_n - \hat{S}_m \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$, $m \geq n_0$, quindi la stessa cosa vale per S_n.

— o — o —

Teorema (serie assolutamente convergenti in spazi di Banach)

Sia a_n una successione a valori in un Banach X. Allora

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|}_{} \text{ converge } \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}}_{}$$

serie delle norme, cioè una serie di numeri ≥ 0

serie a valori nel Banach X (convergere vuol dire che le sue somme parziali S_n convergono ad un certo $S_\infty \in X$)

Dim. riscrivere quella di sopra ed accorgersi che funziona!

— o — o —

Teorema falso X metrico, $A \subseteq X$ chiuso e limitato $\Rightarrow$ A compatto

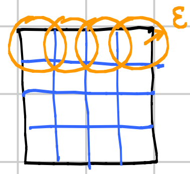
Controesempio alla lezione 4.

Def. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice totalmente limitato se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di palle $B_1, \dots, B_k$ di raggio $\leq \varepsilon$ che ricopre A. Ovviamente k può dipendere da ε.

Oss. 1 Totalmente limitato $\Rightarrow$ limitato

Oss. 2 Non vale il viceversa ($\mathbb{N}$ con $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$ è limitato, ma non tot. limitato)

Oss. 3 In $\mathbb{R}^n$ limitato $\Rightarrow$ totalmente limitato (in $\mathbb{R}^2$ basta ricoprire con un quadrato, e poi suddividerlo quanto serve)



Teorema Sia X metrico completo e sia $A \subseteq X$.
Allora A è compatto $\Leftrightarrow$ A è chiuso e totalmente limitato

Dim. Data x_n a valori in A, basta trovare una s.succ. di Cauchy.
Esiste una palla B_0 di raggio 1 che contiene ∞ el. della successione (qui uso la totale limitatezza con $\varepsilon = 1$).
Esiste una palla B_1 di raggio $\frac{1}{2}$ che contiene ∞ el. DEI PRECEDENTI.

Per induzione: esiste una palla B_k di raggio $\frac{1}{2^k}$ che contiene ∞ el. DEI PRECEDENTI, cioè di quelli che stavano in una stessa palla di raggio $\frac{1}{2^{k-1}}$

Ora scelgo n_k in maniera tale che

- $n_{k+1} > n_k$
- $x_{n_k} \in B_k$

Questa si vede facilmente essere di Cauchy (completare i dettagli).

Così ho dimostrato la freccia $\boxed{\Leftarrow}$.

Quell'altra serve meno (e non è banale).

$\boxed{\text{Teorema delle CONTRAZIONI}}$ Sia X uno spazio metrico $\boxed{\text{completo}}$

Sia $f : X \to X$ una funzione tale che esiste $L < 1$ per cui

$$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y) \qquad \forall x \in X, \ \forall y \in Y$$

(una tale f si dice <u>contrazione</u>: è una $f : X \to X$ Lipschitziana con costante di Lipschitz STRETTAMENTE minore di 1).

Allora f ammette un unico p.to fisso, cioè esiste un unico $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = x_0$.

<u>Dim.</u> $\boxed{\text{Unicità}}$: se ce ne fossero 2, diciamo x_1 e x_2, avremmo che

$$d(x_1, x_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perchè } f(x_1) = x_1 \\ f(x_2) = x_2}}{=} d(f(x_1), f(x_2)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perchè è una} \\ \text{contrazione}}}{\leq} L\, d(x_1, x_2)$$

cioè $\underbrace{(1-L)}_{\neq 0} d(x_1, x_2) \leq 0$, cioè $d(x_1, x_2) \leq 0$, ...

$\boxed{\text{Esistenza}}$ Devo risolvere $f(x) = x$. Prendo a_0 a caso. Costruisco per ricorrenza la successione $a_{n+1} = f(a_n)$ a_0 dato.

$\boxed{\text{Se}}$ a_n ha un limite l in X, allora passando la ricorrenza al limite si ha che

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & f(a_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & f(l) \end{array}$$

cioè l è un p.to fisso (occhio: ho usato che $f(x)$ è continua,

ma questo segue banalmente (provare!) dalla Lipschitzianità).
Per dimostrare che a_n ha un limite in X, basta che dimostri che è di Cauchy.
Fisso $\varepsilon > 0$ e calcolo (supposto $n > m$)

$$d(a_n, a_m) \le d(a_m, a_{m+1}) + d(a_{m+1}, a_{m+2}) + \dots + d(a_{n-1}, a_n)$$

Ora
$$\begin{aligned} d(a_k, a_{k+1}) &= d(f(a_{k-1}), f(a_k)) \\ &\le L\, d(a_{k-1}, a_k) \\ &\le L^2 d(a_{k-2}, a_{k-1}) \\ &\;\vdots \\ &\le L^k d(a_0, a_1) \end{aligned}$$
← si dimostra formalmente per induzione

Quindi
$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) &\le L^m d(a_0, a_1) + L^{m+1} d(a_0, a_1) + \dots + L^{n-1} d(a_0, a_1) \\ &= d(a_0, a_1) L^m (1 + L + L^2 + \dots + L^{n-1-m}) \\ &= d(a_0, a_1) L^m \sum_{n=0}^{\infty} L^n \\ &= d(a_0, a_1) L^m \boxed{\frac{1}{1-L}} \end{aligned}$$
serie geometrica

Se m, quindi anche n, è abbastanza grande, il RHS è $\le \varepsilon$
$\Rightarrow$ la succ. è di Cauchy.

— o — o —

Esercizi Vedere che la tesi è falsa
- se X non è completo
- se $L = 1$
- se anche $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ per ogni $x \in X$, $y \in X$.

— o — o —