SSSUP 2012 — LEZIONE 05

Titolo nota 31/01/2012

<u>Teorema 1</u> (Bolzano-WEIERSTRASS) Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha che

$\underbrace{A \text{ compatto (per successioni)}}$ $\iff$ A chiuso e limitato

Ogni successione x_n a valori in A
ammette almeno una s. succ. convergente ad un elemento di A

<u>Teorema 2</u> $\mathbb{R}$ è completo (rispetto alla metrica standard)

$\boxed{\text{Dim. teo. 1}}$ $\boxed{\text{Via ordinamento}}$ Basta dimostrare $\boxed{\Leftarrow}$

Basta dimostrare che ogni succ. x_n a valori in A ammette s. succ. conv.
Il fatto che il limite stia in A segue dalla chiusura.
Essendo A limitato, esistono M_1 ed M_2 t.c.

$$M_1 \le x \le M_2 \qquad \forall\, x \in A$$

Sia x_n una successione qualunque. Pongo

$$L := \inf \{ a \in \mathbb{R} : x_n \le a \text{ per infiniti } n \}$$

(1) L'insieme di cui faccio l'inf è $\neq \emptyset$ (ci sta M_2)

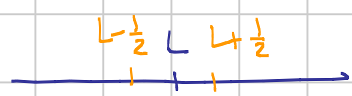
(2) $L \in \mathbb{R}$ (nell'insieme non ci sono $a < M_1$).

(3) Dico che esiste una s. succ. $x_{n_k} \to L$. La costruisco così

Fisso $\varepsilon = 1$. La successione sta

- definitivamente $\ge L-1$
- infinite volte $\le L+1$

Quindi trovo $x_{n_1} \in [L-1, L+1]$



Fisso $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Come prima la succ. sta
∞ volte in $[L-\frac{1}{2}, L+\frac{1}{2}]$. Trovo quindi $n_2 > n_1$
t.c. $x_{n_2} \in [L-\frac{1}{2}, L+\frac{1}{2}]$

E così via per induzione (completare i dettagli).

La successione x_{n_k} converge ad L perché per costruzione

$$L - \frac{1}{2^k} \le x_{n_k} \le L + \frac{1}{2^k},$$

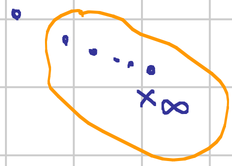
quindi Carabinieri...

Solo alla fine $L \in A$ perché A è chiuso. $\square$

$\boxed{\text{Dim. teo. 2}}$ $\boxed{\text{Via liminf e limsup}}$ Sia x_n una succ. di Cauchy

__Step 1__ Basta dimostrare che una s. succ. converge.

Sia $x_{n_k} \to x_\infty$. Fisso $\varepsilon > 0$. Per k abbastanza grande si ha che $d(x_{n_k}, x_\infty) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Inoltre per n_0 abbastanza grande si ha che $d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ purché $n \geq n_0$, $m \geq n_0$.



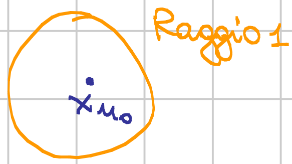
Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$d(x_n, x_\infty) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_k})}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{vera se } n_k \\ \text{ed } n \text{ sono} \\ \text{grandi}}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x_\infty)}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{vera se } n_k \text{ è grande}}} \leq \varepsilon$$

Se $n \geq n_0$, allora scelgo $n_k \geq n_0$ in modo che valga la prima

__Step 2__ Una successione di Cauchy è per forza limitata.

Uso la definizione con $\varepsilon = 1$. Esiste n_0 t.c. $d(x_n, x_m) \leq 1$ per ogni $n \geq n_0$, $m \geq n_0$. In particolare $d(x_{n_0}, x_m) \leq 1$ per ogni $m \geq n_0$. Quindi tutti gli elementi di x_n stanno in $\overline{B}(x_0, 1)$ tranne un numero finito ...



__Step 3__ Tornando in $\mathbb{R}$, una successione x_n di Cauchy è limitata, quindi $L = \limsup_{n \to +\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Ma il limsup è anche maxlim, cioè esiste una s. succ. $x_{n_k} \to L$.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. Teo. 2 via compattezza}}$ Sia x_n una succ. di Cauchy in $\mathbb{R}$. Per lo step 2 di prima so che è limitata, quindi $M_1 \leq x_n \leq M_2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per il teorema 1, applicato in $[M_1, M_2]$ so che x_n ammette una s. succ. convergente. Ma per lo step 1 basta una s. succ. convergente per avere la convergenza di tutta la succ. x_n.

— o — o —

Dim. teo. 1 via completezza Data x_n a valori in A, devo trovare una s. succ. convergente.

Grazie alla completezza, mi basta trovare una s. succ. di Cauchy.

Essendo A limitato so che $\exists\, M_1, M_2$ t.c. $M_1 \leq x_n \leq M_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Divido $[M_1, M_2]$ in 2 parti uguali:

almeno una delle 2 metà contiene infiniti termini della successione. Ne scelgo una. La ridivido e ripeto il ragionamento ... Ottengo una succ. di intervalli inscatolati, ciascuno dei quali contiene ∞ termini della successione.

Siano $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots$ gli intervalli. Scelgo x_{n_k} in modo tale che

$x_{n_k} \in I_k$ e $n_{k+1} > n_k$.

Questa sottosuccessione è di Cauchy perchè dato $\varepsilon > 0$ scelgo k in modo tale che l'ampiezza di I_k sia $\leq \varepsilon$. Definitivamente tutti i termini della s. succ. stanno in I_k, quindi a distanza $\leq \varepsilon$.

— o — o —

<u>Teorema 1</u> (in $\mathbb{R}^n$) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto $\Leftrightarrow$ limitato + chiuso

<u>Teorema 2</u> (in $\mathbb{R}^n$) $\mathbb{R}^n$ è completo.

Dim. teo. 2 in $\mathbb{R}^2$ Sia X_n una succ. di Cauchy in $\mathbb{R}^2$. Allora posto $X_n = (x_n, y_n)$ si ha che x_n e y_n sono a loro volta di Cauchy (perchè $d_{\mathbb{R}}(x_n, x_m) \leq d_{\mathbb{R}^2}(X_n, X_m)$ e idem in y...).

Ma allora per la completezza di $\mathbb{R}$ si ha che

$x_n \to x_\infty$ e $y_n \to y_\infty$. Da qui è facile verificare che

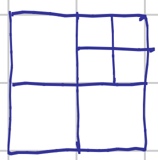
$X_n = (x_n, y_n) \to X_\infty := (x_\infty, y_\infty)$

Stesso ragionamento in $\mathbb{R}^k$.

Dim. teo. 1 in $\mathbb{R}^2$ via completezza Data X_n a valori in un $A \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato, devo trovare una s.succ. convergente.

Basta trovare una s. succ. di Cauchy.

Basta suddividere un quadrato iterativamente.



$\boxed{\text{Dim. teo. 1 alternativa in } \mathbb{R}^2}$ Data $X_n = (x_n, y_n)$ a valori in $A \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato.

La successione x_n e la successione y_n sono limitate (in $\mathbb{R}$).

Quindi procedo così

- scelgo n_k in maniera tale che $x_{n_k} \to x_\infty$ in $\mathbb{R}$
- scelgo una s.succ. di questa, diciamo n_{k_i} in maniera tale che $y_{n_{k_i}} \to y_\infty$ in $\mathbb{R}$.

Si verifica facilmente che $X_{n_{k_i}} \to X_\infty := (x_\infty, y_\infty)$

Stesso discorso in $\mathbb{R}^n$: basta ogni volta estrarre dalla precedente.

—o—o—