

Def. Siano X e Y due spazi topologici, e sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione

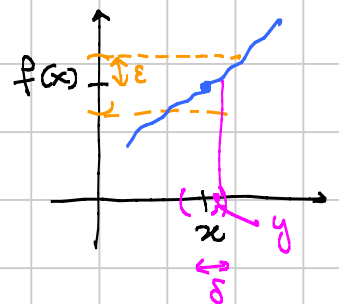
Si dice che f è continua in X se per ogni successione $x_n \rightarrow x_\infty$ (convergente in X) si ha che $f(x_n) \rightarrow f(x_\infty)$ (convergenza in Y).

Achtung! Quella che ho definito è la **CONTINUITÀ PER SUCCESSIONI**

Def. Se (X, d_x) e (Y, d_y) sono spazi metrici, si dice che $f: X \rightarrow Y$ è continua se

$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

$$d_x(x, y) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$



Questa definizione si può estendere anche in un contesto topologico, portando alla definizione vera di **CONTINUITÀ**

Fatti generali

- Nel contesto metrico la continuità ε - δ è equivalente alla continuità per successioni (*esercizio fattibile*)
- Nel contesto topologico non sono equivalenti (*non provarci!*)

Definizione Uno spazio metrico od uno spazio topologico X si dicono **COMPATTI PER SUCCESSIONI** se ogni successione a valori in X ammette una s. succ. convergente.

Definizione Sia X uno spazio topologico e sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ^{in analisi}.

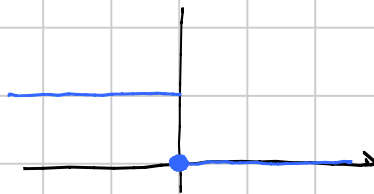
Si dice che f è semicontinua inferiormente in X (s.c.i.) se per ogni successione $x_n \rightarrow x_\infty$ convergente in X si ha che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_\infty)$$

Brutalmente: al limite f può solo "crollare"

Esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$



È semicontinua inferiormente.

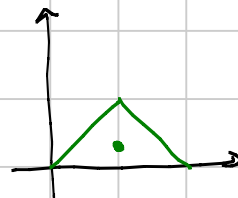
Teorema di WEIERSTRASS Sia X uno sp. top. compatto per successioni.

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione s.c.i.

Allora esiste di sicuro

$$\min \{ f(x) : x \in X \}$$

Oss.1 L'esistenza del max non è garantita



Esercizio Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice s.c.s. (semitcontinua superiormente) se

$$\forall x_n \rightarrow x_\infty \text{ in } X \text{ si ha che } \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq f(x_\infty).$$

Enunciare e dimostrare un teo. di Weierstrass per funzioni s.c.s.

[Dim. W s.c.i.] Considero $l := \inf \{ f(x) : x \in X \}$.

Per una proprietà generale dell'inf. esiste una successione $x_n \in X$ tale che $f(x_n) \rightarrow l$

Poiché X è compatto, la successione $\{x_n\}$ ha una s.succ. convergente, cioè $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

Ma allora grazie alla semicontinuità inferiore sappiamo che

$$l \leq f(x_\infty) \stackrel{\text{s.c.i.}}{\leq} \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

perché l è l ' inf.

Dunque $f(x_\infty) = l$, quindi x_∞ è un pto di minimo. $\square$

Discorso filosofico Domanda: conviene avere tante successioni convergenti o poche?

→ Se io metto tante succ. convergenti in X , sarà più facile che X sia compatto (è più facile trovare s.succ. convergenti), ma è più difficile che $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sia s.c.i. (devo controllare tante volte la disuguaglianza con il liminf).

Si tratta di trovare il giusto equilibrio.

Def. Sia X uno spazio topologico e sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è **COERCIVA** se i sottolivelli di f sono compatti, cioè se $\forall M \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X : f(x) \leq M\}$ è compatto.

Teo. di W. generalizzato Sia X topologico (non necessariamente compatto) e sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ s.c.i. e coerciva. Allora esiste.
$$\min \{f(x) : x \in X\}$$

Dim. Prendo $x_0 \in X$ qualunque. Prendo $M = f(x_0)$. Considero
$$\{x \in X : f(x) \leq M\} = S_M$$

Questo è compatto perché f è coerciva. ↑ per avere il sotto livello non vuoto
Allora per W classico esiste
$$\min \{f(x) : x \in S_M\}$$

Questo minimo è anche minimo su tutto X . $\square$

Oss. Nella dimostrazione ho usato solo che esiste almeno un valore $M \in \mathbb{R}$ per cui S_M è compatto e non vuoto.

Esercizio Stessa cosa in versione s.c.s.

Compattezza in $\mathbb{R}^n$. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se

- * A è chiuso
- * A è limitato

Compattezza in generale Sia X un metrico, e sia $A \subseteq X$.

Allora è ancora vero che

* A compatto $\Rightarrow A$ chiuso [se non è chiuso esiste $\{x_n\} \subseteq A$ t.c. $x_n \rightarrow x_\infty \notin A$, ma allora questa non può avere s.succ. conv. in A]

* A compatto $\Rightarrow A$ limitato [esercizio: se A non è limitato esiste una succ. in A in cui $d(x_n, x_m) \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$...]

Non è vero però che
chiuso + limitato $\Rightarrow$ compatto

Esempio $X := \mathbb{N}$ $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$

X è limitato (è tutto contenuto nella palla con centro in 2012 e raggio 3)

X è chiuso (tutto lo spazio è sempre chiuso)

Però X non è compatto perché la successione $x_n = n$ non può avere s.succ. convergenti (se avesse una s.succ. conv., questa sarebbe di Cauchy, ma la distanza fra 2 qualunque elementi è sempre 1).

— o — o —