

- Insieme
- Spazio Topologico
- Spazio Metrico
- Spazio di BANACH
- Spazio di Hilbert
- $\mathbb{R}^n$

Spazio Metrico  $(X, d)$  dove

- $X$  è un insieme
- $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  è una distanza su  $X$

Def. Una successione  $\{x_n\}$  a valori in  $X$  si dice successione di CAUCHY se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c.}$$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0.$$

Def. Uno spazio metrico si dice **COMPLETO** se tutte le successioni di Cauchy a valori in  $X$  convergono (cioè hanno un limite in  $X$ ).

Oss. Se una successione  $x_n$  a valori in uno sp. metrico converge, allora di sicuro è di Cauchy. [Esercizio]

Data una metrica, abbiamo aperti, chiusi, intorni, bordi, ... e abbiamo una nozione di succ. convergente:  $x_n \rightarrow x_\infty$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } d(x_n, x_\infty) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Spazio topologico. Insieme  $X$  più un sottoinsieme  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$  che verifica tre proprietà (brutalmente:  $\tau$  è l'insieme degli aperti)

Oss. Data una topologia, abbiamo le successioni convergenti:  $x_n \rightarrow x_\infty$  se  $\forall A \in \tau$  con  $x_\infty \in A \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x_n \in A \quad \forall n \geq n_0.$

**METAPROGRAMMA** Lo scopo è quello di avere una nozione di convergenza per successioni. Da questa si ottengono CONTINUITÀ, COMPATTEZZA, TEO. DI WEIERSTRASS quindi teoremi di esistenza per max e min.

## SPAZI DI BANACH

Sia  $X$  uno spazio vettoriale.

Def. Una norma su  $X$  è una funzione  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  con queste proprietà

- (N1)  $\|x\| \geq 0$  per ogni  $x \in X$ ,
- (N2)  $\|x\| = 0$  se e solo se  $x = 0$ ,
- (N3)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  per ogni  $x \in X$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
- (N4)  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$  per ogni  $x \in X, y \in X$ .

Brutalmente: norma = "lunghezza" di un vettore.

Fatto generale. Data una norma su uno sp. vett.  $X$ , possiamo definire una distanza ponendo

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

[Esercizio: verificare che si tratta proprio di una distanza]

Definizione Uno spazio di Banach è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma che lo rende uno spazio metrico completo. Occhio! lo spazio è sempre una coppia (insieme, norma) oppure (insieme, distanza)

## SPAZI DI HILBERT

Sia  $X$  uno sp. vettoriale.

Def. Un prodotto scalare definito positivo è una funzione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che}$$

- (PS1)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x \in X, \forall y \in X,$  simmetria
- (PS2)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall x \in X, \forall y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R},$
- (PS3)  $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall (x, y, z) \in X^3,$  Bilinearietà
- (PS4)  $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X,$
- (PS5)  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$  definito positivo.

Fatto generale:  $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$  è una norma su  $X$  (esercizio!)

Def. Uno spazio di Hilbert è uno sp. vett. su cui è definito un prodotto scalare che produce una norma che produce una distanza che lo rende uno spazio metrico completo.

Esempio 1  $X = \mathbb{R}^2$  Dato  $p \geq 1$  poniamo

$$\|(x, y)\|_p := [ |x|^p + |y|^p ]^{1/p} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Nel caso  $p=2$  otteniamo il classico  $\mathbb{R}^2$  con la classica distanza (spazio di Hilbert)

Nel caso  $p=1$  otteniamo  $\mathbb{R}^2$  con la distanza "taxi driver". Si tratta di uno spazio di Banach.

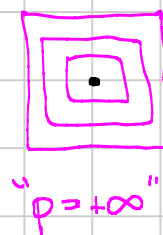
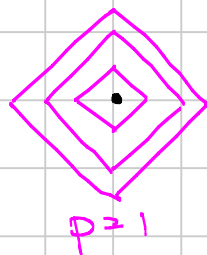
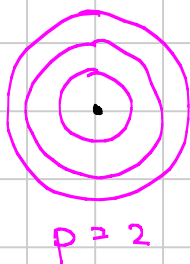
Osservazione Le due norme con  $p=1$  e con  $p=2$  inducono la stessa topologia, cioè una successione converge in un caso se e solo se converge nell'altro.

Motivo brutale: in ogni  $\circ$  ci sta un  $\diamond$  e viceversa

Motivo rigoroso: esistono 2 costanti  $C_1 > 0$  e  $C_2 > 0$  t.c.

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Oss. Come sono fatte le palle centrate in un pto rispetto alle  $\|\cdot\|_p$ ?



Oss. • La (N3) si traduce nel fatto che le palle sono ovoidali (le une rispetto alle altre ( $\lambda > 0$ ) e simmetriche rispetto all'origine (se  $x \in B(0, r)$ , allora  $-x \in B(0, r)$ ).

• La (N4) si traduce nella convessità delle palle.

$$[\text{Brutalmente: } \|\frac{x+y}{2}\| = \frac{1}{2} \|x+y\| \leq \frac{1}{2} \|x\| + \frac{1}{2} \|y\| \leq 1]$$

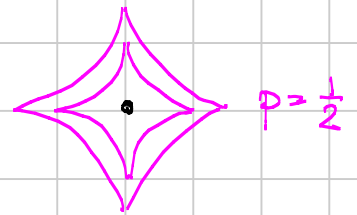
$\downarrow$   
 $\leq 1$

[Esercizio: dimostrare la stessa cosa per tutto il segmento di estremi  $x$  e  $y$ ]

Oss. Dare una norma in uno spazio vettoriale è equivalente a dare un convesso che contenga l'origine e sia simmetrico rispetto all'origine stessa (Brutalmente: sarebbe la palla con centro nell'origine e raggio 1).

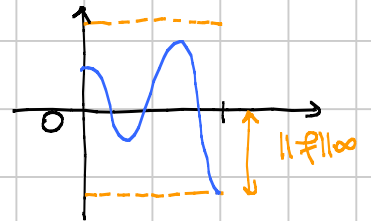
Esercizio Dimostrare che  $\mathbb{R}^2$  con  $\|\cdot\|_p$  è uno spazio di Hilbert se e solo se  $p=2$ .

Oss. Per  $p < 1$  le palle non sono più convesse



Esempio 2  $X = C^0([0,1])$ . Si verifica che

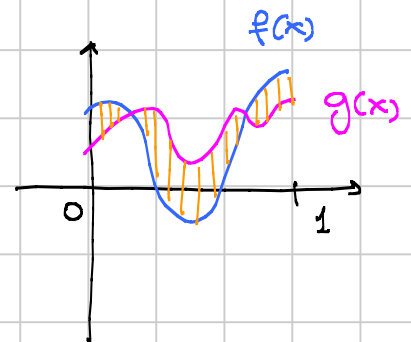
$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &= \sup \{ |f(x)| : x \in [0,1] \} \\ &= \text{minima "semiapertura" di una} \\ &\quad \text{striscia centrata sull'asse } x \text{ che} \\ &\quad \text{contiene il grafico}\end{aligned}$$



è una norma su  $X$  (Esercizio).

La distanza indotta è

$$\begin{aligned}d(f,g) &:= \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [0,1] \} \\ &= \text{più lungo segmento} \\ &\quad \text{verticale tra i grafici} \\ &= \|f - g\|_\infty\end{aligned}$$



Oss. I sup sono in realtà dei max.  
— o — o —