# SSSUP 2012 - LEZIONE 02

Titolo nota 16/01/2012

Sia $(X,d)$ uno spazio metrico.

<u>Def</u>. Dato $x_0 \in X$ e $r \geq 0$ definiamo

$$B(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$$ palla aperta con centro in $x_0$ e raggio $r$

$$\bar{B}(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$$ palla chiusa

<u>Esercizio</u> È possibile in uno spazio metrico che ci sia una palla contenuta propriamente (cioè $\subsetneq$) in una palla di raggio strettamente inferiore?

Dalle palle seguono insiemi aperti, chiusi, intorni...

<u>Def</u>. Sia $A \subseteq X$ e sia $x_0 \in X$. Si dice che

- $x_0$ è <u>interno</u> ad $A$ se $\exists\, r > 0$ t.c. $B(x_0,r) \subseteq A$
- $x_0$ è <u>aderente</u> ad $A$ se $\forall\, r > 0$ si ha che $B(x_0,r) \cap A \neq \emptyset$
- $x_0$ è sul <u>bordo</u> di $A$ se $\forall\, r > 0$ si ha che $B(x_0,r) \cap A \neq \emptyset$ e $B(x_0,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$
- $x_0$ è di <u>accumulazione</u> per $A$ se $\forall r > 0$ si ha che $\{B(x_0,r) \cap A\} \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

<u>Def</u>. Sia $A \subseteq X$. Allora si definisce

- $\mathring{A}$ la <u>parte interna</u> di $A$, cioè l'insieme dei p.ti interni ad $A$
- $\bar{A}$ la <u>chiusura</u> di $A$, cioè " " aderenti ad $A$
- $\partial A$ la <u>frontiera</u> di $A$, cioè l'insieme dei p.ti sul bordo di $A$.

<u>Esercizio</u> Si ha che $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ per ogni $A \subseteq X$.

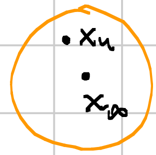
<u>Def</u>. Sia $A \subseteq X$. Si dice che

- $A$ è aperto se $A = \mathring{A}$
- $A$ è chiuso se $A = \bar{A}$

Tutto ciò produce il concetto di successione convergente.
Si dice che una successione $\{x_n\} \subseteq X$ converge ad un certo $x_\infty \in X$ se

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $x_n \in B(x_\infty, \varepsilon)$ definitivamente

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $x_n \in B(x_\infty, \varepsilon)$ $\forall n \geq n_0$




Questo è analogo a dire che $\underbrace{\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_\infty)}_{\text{limite di numeri}} = 0$

Esercizi ① Dimostrare che l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto. E se fossero infiniti?

② Dimostrare che l'unione di una famiglia qualunque di aperti è un aperto. Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ la famiglia, ad esempio

$I$: insieme di indici

in $\mathbb{R}$ $\{(x, x+3)\}_{x \in \mathbb{R}}$ è una famiglia di aperti.

③ Osservare che $\emptyset$ e $X$ sono aperti "gratis"

④ Riformulare i p.ti precedenti per i chiusi.

③.5 Osservare che $A$ è aperto se e solo se $X \setminus A$ è chiuso.

—o —o —

Spazio topologico È una coppia $(X, \tau)$, dove $X$ è un insieme e $\tau$ è una famiglia di sottoinsiemi di $X$ (quindi $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, cioè $\tau$ è contenuto nell'insieme delle parti di $X$) tali che

($\tau$1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$,

($\tau$2) l'intersezione FINITA di elementi di $\tau$ sta ancora in $\tau$,

($\tau$3) l'unione QUALUNQUE di elementi di $\tau$ sta ancora in $\tau$.

Brutalmente: gli elementi di $\tau$ sono i sottoinsiemi di $X$ che io considero aperti

Esercizio Ridare tutte le definizioni di p.ti interni, aderenti, ... nel contesto topologico.

**Esempio** Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione. Si dice che $x_n \to x_\infty \in X$ se $\forall B \in \tau$ con $x_\infty \in B$ si ha che $x_n \in B$ definitivamente


**Esercizio sui metrici** Sia $(X, d)$ metrico e siano $x_0 \neq y_0$ due p.ti distinti di $X$. Allora $\exists r > 0$ t.c. $B(x_0, r) \cap B(y_0, r) = \emptyset$

[Hint: $r = \frac{1}{2} d(x_0, y_0)$ + usare la triangolare]

**Definizione** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Una successione $\{x_n\} \subseteq X$ si dice di Cauchy se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \ \forall m \geq n_0$

**Esercizio** Se una successione converge, allora di sicuro è di Cauchy.

[Hint: se $n$ ed $m$ sono grandi, allora $x_n$ ed $x_m$ sono vicini al limite $x_\infty$, dunque sono vicini tra di loro]

In generale non vale il viceversa.

**Definizione** Uno spazio metrico $(X, d)$ si dice COMPLETO se tutte le successioni di Cauchy a valori in $X$ convergono.

**Esempio 1** $\mathbb{N}$ con la distanza classica è completo (una successione di Cauchy a valori in $\mathbb{N}$ è definitivamente costante)

**Esempio 2** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la distanza classica non è completo (la successione $\frac{1}{n}$ è di Cauchy, ma non converge)

**Esempio 3** $\mathbb{Q}$ con la distanza classica non è completo (basta prendere una successione di razionali che tende a $\sqrt{2}$)

<u>Esempio 4</u> $\mathbb{R}$ con la dist. classica è completo

<u>Esempio 5</u> $\mathbb{R}^n$ con la distanza classica è completo
(esercizio: basta passare alle componenti)

<u>Esempio 6</u> $\mathbb{R}^n$ con la taxi driver è completo
(esercizio: come sopra)

<u>Osservazione</u> Il concetto di succ. di Cauchy è metrico, non topologico.
Il concetto di continuità è topologico.
Il concetto di uniforme continuità è metrico.