SSSUP 2012 - LEZIONE 01

Titolo nota 16/01/2012

Analisi 1 : funzioni di 1 variabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Analisi 2 : funzioni di un numero finito di variabili $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Analisi 3 : funzioni di infinite variabili $f : X \to \mathbb{R}$

$f : X \to Y$

dove X e Y sono "spazi" di dimensione infinita.

$\boxed{\text{Problemi classici di analisi 1}}$

* problemi di minimo $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

$\min \{ f(x) : x \in A \}$

→ esistenza : Weierstrass e sue varianti (il che implica compattezza, continuità, limiti)

→ ricerca tra i p.ti stazionari : calcolo differenziale ed equazioni del tipo $f'(x) = 0$.

* problemi di evoluzione : equazioni diff. del tipo $u' = f(t, u)$ o di ordine superiore. L'incognita è $u : (a,b) \to \boxed{\mathbb{R}}$

$\boxed{\text{Stessa cosa in analisi 2}}$

* problemi di minimo $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}$

$\min \{ f(x) : x \in A \}$

.... $\nabla f(x) = 0$ ← equazione vettoriale (n equazioni in n incognite)

... il bordo è un po' più complicato ⇝ parametrizzazioni e/o moltiplicatori di Lagrange.

* problemi di evoluzione L'incognita è $u : (a,b) \to \mathbb{R}^m$

$u' = f(t, u)$ ← sistema di n equazioni differenziali

Le incognite sono le n componenti di u.

Stessa cosa in analisi 3 → Problemi di minimo
→ Problemi di evoluzione

Esempio 1 $\min\left\{ \int_0^1 |f'(x)|^2 dx : f \in C^1([0,1]),\ f(0)=0,\ f(1)=7 \right\}$

Notazione: $C^k([a,b])$ o $C^k((a,b))$ è l'insieme delle funzioni $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ che sono continue insieme alle loro prime k derivate.

Questo si può vedere come $\min\{F(u) : u \in X\}$ dove
X = insieme delle funzioni $\in C^1([0,1])$ t.c. $u(0)=0$ e $u(1)=7$
$F(u) = \int_0^1 |u'(x)|^2 dx$

L'insieme su cui si lavora è uno spazio di funzioni, cioè un oggetto di dimensione infinita. La funzione che vogliamo minimizzare prende in input delle funzioni (gli elementi di X) e restituisce numeri reali $F: X \to \mathbb{R}$.

Di solito F si chiama FUNZIONALE, cioè una funzione che ha come argomento delle funzioni

Altro esempio: $\min\left\{ \int_0^1 \left[|u'(x)|^4 + |u''(x)|^8 - \sin u(x) \right] dx : u(0)=u(1)=0,\ u \in C^2([0,1]) \right\}$

Problemi di evoluzione L'incognita è una funzione
$u : (a,b) \to X$
intervallo temporale

spazio infinito-dimensionale, ad esempio uno spazio di funzioni

Esempio classico Parametrizziamo una sbarretta con un intervallo $x \in [0,1]$. La temperatura della sbarretta è una funzione $u(t,x)$, dove $u(t,x)$ è un numero reale che indica la temperatura al tempo t nel p.to x. Allo stesso modo la posso pensare come $u(t)$,

dove ora $u: (a,b) \to$ spazio delle funzioni $f: [0,1] \to \mathbb{R}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\, \psi$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\, t$

in output ho $u(t, \cdot)$.

L'equazione del calore è $u_t = u_{xx}$ ← equazione differenziale alle derivate parziali

Tipico problema:

$$u_t = u_{xx} \quad t \geq 0, \; x \in [0,1] \quad \leftarrow \text{eq. diff.}$$
$$u(0,x) = u_0(x) \quad \leftarrow \text{condizione iniziale}$$
$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad \leftarrow \text{condizione al bordo}$$

Caso tipico: cocomero messo in frigo. Conosco la temperatura iniziale di tutto il cocomero, e conosco la temperatura al bordo per tutti i $t \geq 0$. Voglio sapere come si evolve la temperatura del cocomero in tutti i pti e per tutti i $t \geq 0$.

— o — o —

<u>Strumenti per affrontare questi problemi</u>

Serve della struttura sull'insieme X

→ X insieme (nessuna struttura)
→ X spazio topologico
→ X spazio metrico ← TRATTEREMO
→ X spazio di BANACH
→ X spazio di HILBERT ← TRATTEREMO
→ $X = \mathbb{R}^n$ (analisi 2)

— o — o —

<u>Spazio metrico</u> È un insieme X su cui è definita una <u>distanza</u>.

Una distanza è una funzione $d: X \times X \to \mathbb{R}$ con queste proprietà

(D1) $d(x,y) \geq 0$ per ogni $x \in X$, $y \in X$,

(D2) $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$,

(D3) $d(x,y) = d(y,x)$ (simmetria) $\forall x \in X \; \forall y \in X$,

(D4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X$.
(disuguaglianza triangolare)

Uno spazio metrico si indica con (X,d).

Esempio 1 $\quad X = \mathbb{R} \qquad d(x,y) = |y-x|$

Esempio 2 $\quad X = \mathbb{R}^n \qquad d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$

Esempio 3 $\quad X$ = insieme qualunque

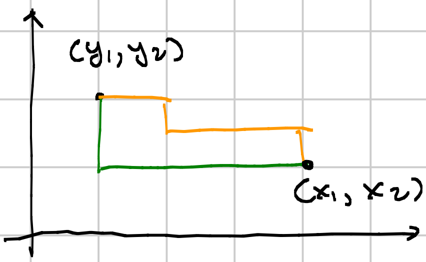
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Esempio 4 $\quad X = \mathbb{R} \qquad d(x,y) = \arctan |y-x|$

Esempio 5 $\quad X = \mathbb{R} \qquad d(x,y) = |\arctan y - \arctan x|$

Esempio 6 $\quad X = \mathbb{R}^2 \qquad d(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \qquad x = (x_1, x_2)$

(TAXI DRIVER DISTANCE) $\qquad y = (y_1, y_2)$



Esempio 7 $\quad X = C^0([0,1])$ $\quad$ Date $u \in X$, $v \in X$ definisco

$$d(u,v) = \max \{ |u(x) - v(x)| : x \in [0,1] \}$$

Esempio 8 $\quad X = C^0([0,1]) \qquad d(u,v) = \int_0^1 |u(x) - v(x)|^2 \, dx$

Esercizio $\quad$ Dimostrare che quelle scritte sono distanze

Esercizio $\quad X = \mathbb{R}$ $\quad$ Per quali funzioni $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha che

$d(x,y) = \varphi(|y-x|)$ $\quad$ oppure $\quad d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$

sono distanze su $\mathbb{R}$?