

Teorema di linearizzazione Supponiamo che l'origine sia un p.to stazionario per un sistema.

Allora vicino all'origine le traiettorie si comportano come le traiettorie del sistema linearizzato, TRANNE se siamo in presenza di autovalori con parte reale nulla.

[Idea: nei casi di autovalori con parte reale >0 o <0 tutti si può usare un ragionamento energetico. Il caso di segno diverso è più complicato].

Se il p.to non è l'origine, con una traslazione posso fare in modo che lo sia.

Esempio 1 (Pendolo smorzato)

$u'' + u = 0$ oscillatore armonico

$u'' + \sin u = 0$ pendolo

$u'' + \textcircled{+} u' + \sin u = 0$ pendolo smorzato

↑
segno giusto: l'attrito si oppone al moto.

Trasformo in sistema

$$u' = v$$

$$v' = u'' = -u' - \sin u = -v - \sin u$$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -v - \sin u \end{cases}$$

L'origine è un p.to stazionario. Linearizzo il sistema

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -u - v + o(u) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

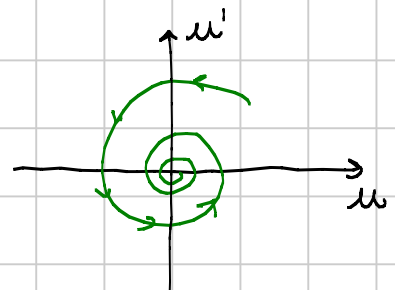
$$S: -1 \quad P = 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \Delta < 0$$

radici complesse coniugate con $\alpha = -\frac{1}{2} < 0$

Per il teo. di linearizzazione le

soluzioni che partono vicino a $(0,0)$ si comportano allo stesso modo.



Il p.to $(u, v) = (\pi, 0)$ è pure lui stazionario.

Ponendo $u = \pi + w$ sposto il problema in $(w, v) = (0, 0)$

$$w' = u' = v$$

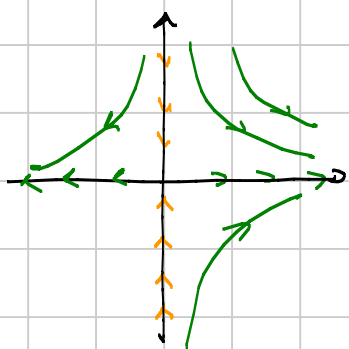
$$v' = -v - \sin u = -v - \sin(\pi + w) = -v + \sin w$$

Il nuovo sistema è

$$\begin{cases} w' = v \\ v' = -v + \sin w \end{cases} \quad \text{linearizzo} \quad \begin{cases} w' = v \\ v' = w - v + o(w) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$S = -1$ $P = -1 \Rightarrow 2$ radici reali, una + e una -



Parti reali degli autovalori $\neq 0$

$\Rightarrow$ posso usare teo. linearizzazione

$\Rightarrow$ vicino a $(\pi, 0)$ le traiettorie hanno lo stesso comportamento.

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$u' = u - 6uv$$

$$v' = -5v + 3uv$$

Modello PREDATOR-PREDATORE

"v mangia u"

v = leoni

u = pecore

Situazioni stazionarie: $(0, 0)$ oppure $(\frac{5}{3}, \frac{1}{6})$

Sono stabili?

Guardo $(0, 0)$: linearizzando ottengo $\begin{cases} u' = u \\ v' = -5v \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

L'origine è instabile (tranne in una direzione).

Vediamo $(\frac{5}{3}, \frac{1}{6})$. Pongo $u = \frac{5}{3} + z$ $v = \frac{1}{6} + w$

$$\begin{aligned} z' = u' = u - 6uv &= \frac{5}{3} + z - 6\left(\frac{5}{3} + z\right)\left(\frac{1}{6} + w\right) \\ &= \cancel{\frac{5}{3}} + \cancel{z} - \cancel{\frac{5}{3}} - \cancel{z} - 10w - 6zw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w' = v' = -5v + 3uv &= -\frac{5}{6} - 5w + 3\left(\frac{5}{3} + z\right)\left(\frac{1}{6} + w\right) \\ &= -\cancel{\frac{5}{6}} - \cancel{5w} + \cancel{\frac{5}{6}} + \cancel{5w} + \frac{z}{2} + 3zw \end{aligned}$$

Sistema linearizzato: $z' = -10w$
 $w' = \frac{z}{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$S: 0 \quad P: +5 \Rightarrow$ radici immaginarie pure
 $\Rightarrow$ il linearizzato è così  ma questo non si conserva per passaggio al non-lineare.

Altro approccio: $\frac{du}{dt} = u - 6uv$ $\frac{dv}{dt} = -5v + 3uv$

"Quindi" $\frac{dv}{du} = \frac{-5v + 3uv}{u - 6uv} = \frac{v(-5 + 3u)}{u(1 - 6v)}$
 $\downarrow$ derivata della traiettoria

Ho derivato $v(u^{-1}(t)) \dots$

Ho ottenuto che $v' = \frac{-5 + 3u}{u} \frac{v}{1 - 6v}$

Quindi v , come funzione di u , risolve un'eq. a variabili separabili. Con questo sistema si può vedere che le traiettorie sono effettivamente curve chiuse.
— o — o —

Esercizio $u' = u - 3uv$ Due specie in competizione
 $v' = 5v - 7uv$

Calcolare i pti stazionari e vedere che tipo di stabilità hanno.
— o — o —

Esempio 3 Sistema $\begin{cases} u' = v \\ v' = \frac{5}{2}v - u + u^2 \end{cases}$

- ① Trovare pti stazionari: $(0,0)$ e $(1,0)$
- ② Studiarne la stabilità per linearizzazione:
 $(0,0)$ 2 autov. positivi
 $(1,0)$ un autov. + e un autov. -

- ③ Sarebbe bello avere una soluzione che parte da $(0,0)$ e arriva in $(1,0)$

$$\frac{dv}{du} = \frac{5}{2} - \frac{u(1-u)}{v}$$

equazione che posso studiare qualitativo.

- ④ Faccio lo studio con partenza da $\frac{1}{2}$
Ci sono soluzioni che crescono
e altre che toccano e vanno su...
Quindi soglia.

- ⑤ Tutte le soluzioni che passano per
il tratto crescente di parabola tornando indietro vanno a
giungere nell'origine.
Basta osservare che $v=2u$ è sottosoluzione dell'equazione

