SSSUP 2011 - LEZIONE 25

Titolo nota 08/06/2011

Sistemi di equazioni differenziali lineari

$U' = AU$ $\quad\quad U(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$

matrice

L'origine è sempre un p.to stazionario.

Problema della stabilità:

① se parto vicino all'origine, resto vicino all'origine?

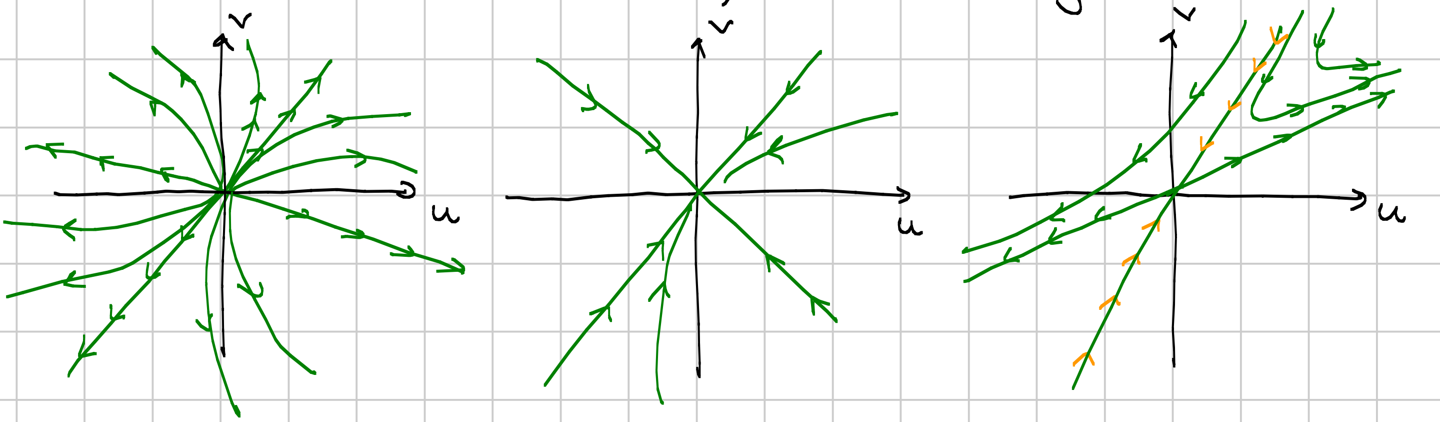
② " " " " , la soluzione tende all'origine?

③ se parto da qualunque parte, tendo all'origine?

Nel caso lineare si risponde grazie alle formule esplicite per le soluzioni.

Nel caso 2×2 ci sono pochi casi.

- Matrice con 2 autovalori $\lambda \neq \mu$ reali $\Rightarrow$ diagonalizzabile



$\lambda > 0,\ \mu > 0$ instabile $\quad\quad$ $\lambda < 0,\ \mu < 0$ stabile $\quad\quad$ $\lambda > 0,\ \mu < 0$ instabile

(caso speciale: quando uno degli autovalori è nullo. Qui le traiettorie sono rette parallele tra di loro: pensare al sistema diagonalizzato!!!)

- Matrice con 2 autovalori reali coincidenti
  - se molt. geom. = 2, allora matrice diagonalizzabile, quindi come sopra a seconda del segno di λ: traiettorie = rette

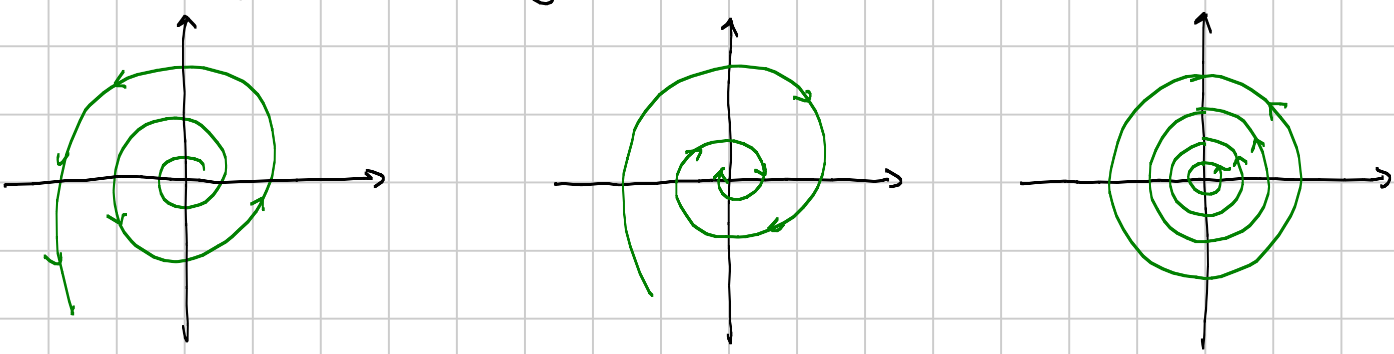
- se molt. geom = 1, allora non diagonalizzabile, quindi ancora come sopra ma le curve non sono potenze.
La matrice si può sempre mettere nella forma $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

- Matrice con 2 autovalori complessi coniugati $\alpha \pm i\beta$. La matrice si può mettere nella forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Passando in coordinate polari, il sistema diventa $\begin{cases} \dot{\rho} = \alpha \rho \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases}$

$\rho(t) = \rho(0) \cdot e^{\alpha t}$ $\qquad \theta(t) = \theta(0) + \beta t$

Tutto dipende dal segno di α



$\alpha > 0$ $\qquad$ $\alpha < 0$ $\qquad$ $\alpha = 0$

instabile $\qquad$ stabile $\qquad$ stabile in senso ①, ma non in senso ②

— o — o —

<u>Ragionamento energetico</u> Prendiamo un sistema diagonale con autovalori $-\lambda < 0$ e $-\mu < 0$

$$\begin{cases} u' = -\lambda u \\ v' = -\mu v \end{cases} \qquad E(t) = \frac{1}{2} u^2(t) + \frac{1}{2} v^2(t)$$

$$E'(t) = u(t)\, u'(t) + v(t)\, v'(t)$$
$$= -\lambda u^2(t) - \mu v^2(t)$$

Se $\lambda < 0$ e $\mu < 0$ so che $E'(t) \leq 0$. Questo porta stabilità nel senso ①. In realtà posso dire anche che

$$E'(t) \leq -\min\{\lambda, \mu\}\, E(t), \quad \text{cioè} \quad E'(t) \leq -c\, E(t).$$

Questo dice che $E(t)$ è una sottosoluzione di $y' = -cy$ quindi sta sotto la soluzione di questa equazione che parte con

lo stesso dato iniziale, quindi $E(t) \leq E(0)\, e^{-ct}$.
Questo dà stabilità nei sensi ② e ③, e anzi dice che la convergenza all'origine è almeno esponenziale.

<u>Esercizio</u> Vedere cosa accade se i 2 autovalori sono > 0.

I ragionamenti energetici valgono anche per sistemi NON LINEARI

$$\begin{cases} u' = \boxed{-3u} + u^2 - v^3 \\ v' = \boxed{-2v} - u^6 \end{cases}$$

L'origine è un p.to stazionario.
Limitandomi alla parte lineare saprei tutto sulla stabilità

Ragionamento energetico: $E(t) = \frac{1}{2} u^2(t) + \frac{1}{2} v^2(t)$

$$\begin{aligned} E'(t) &= u(t) \cdot u'(t) + v(t) \cdot v'(t) \\ &= -3u^2 + u^3 - uv^3 - 2v^2 - u^6 v \\ &= -3u^2 - 2v^2 + (u^3 - uv^3 - u^6 v) \end{aligned}$$

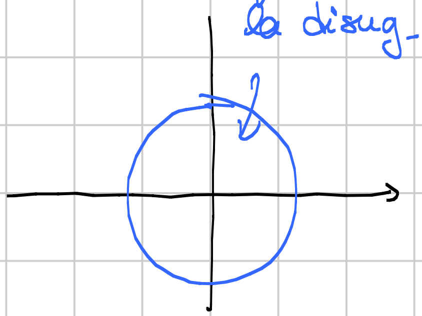
<u>Fatto misterioso</u>: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno dell'origine in cui $|u^3 - uv^3 - u^6 v| \leq \varepsilon (u^2 + v^2)$

Per dim. formalmente, basta passare in coord. polari e ottenere che

$$|\rho^3 \cos^3\theta - \rho^4 \ldots - \rho^7 \ldots| = \rho^2 \underbrace{|\rho \ldots + \rho^2 \ldots + \rho^3 \ldots|}_{\leq \varepsilon \text{ se } \rho \text{ è piccolo}} \leq \varepsilon \rho^2$$

vera fino a quando sono abbastanza vicino all'origine

Quindi $E'(t) \leq -3u^2 - 2v^2 + \varepsilon(u^2 + v^2)$
$\leq -(u^2 + v^2) \leq -E(t)$



Fin che resto nel cerchio vale disug
Fin che vale disug ho $E' \leq -E$
Fin che $E' \leq -E$ ho che E decresce
Se E decresce non posso uscire dal cerchio