SSSUP 2011 - LEZIONE 24

Titolo nota 31/05/2011

Stabilità per sistemi di equazioni differenziali

$$u' = au + bv$$
$$v' = cu + dv$$

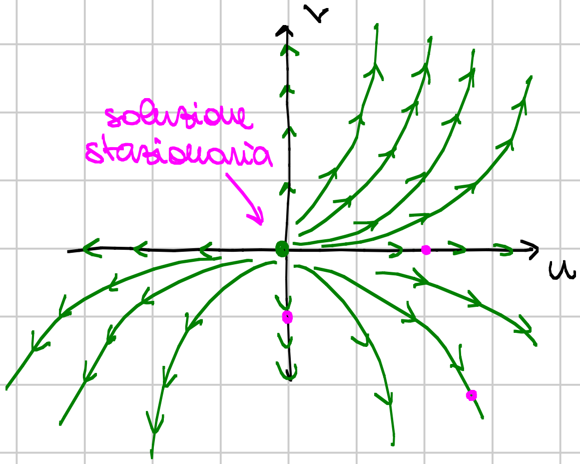
$$U' = AU \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Il sistema ha la soluzione banale $(u(t), v(t)) = (0,0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

La soluzione di un sistema si rappresenta graficamente come traiettorie nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^2$, pensato come coppie (u,v)

Se il sistema è diagonale è facile rappresentare le soluzioni

$$u' = u \qquad u(t) = c_1 e^t$$
$$v' = 5v \qquad v(t) = c_2 e^{5t}$$



Moralmente $v(t) = c\,[u(t)]^5$

Tutte le traiettorie tendono a $(0,0)$ per $t \to -\infty$ e tendono all'infinito per $t \to +\infty$

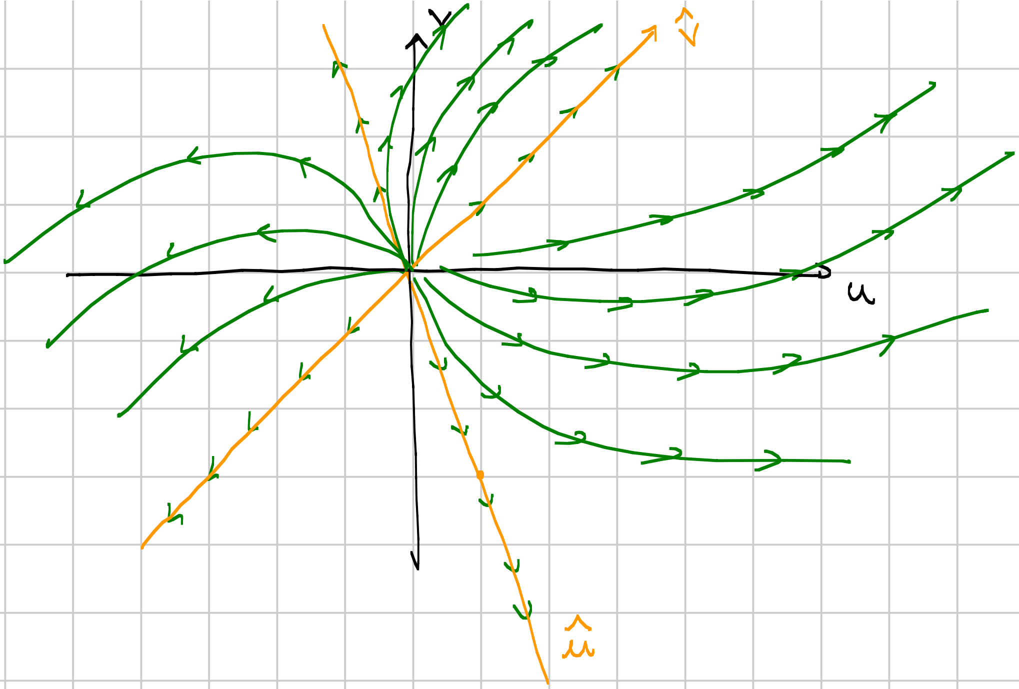
Cosa succede se il sistema è

$$u' = 4u + v$$
$$v' = 3u + 2v$$

La soluzione è

$$u(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Quindi ho la stessa figura con $(1,0)$ che diventa $(1,-3)$ e $(0,1)$ che diventa $(1,1)$



Problema della stabilità: se parto vicino all'origine, resterò vicino all'origine?

Quali sono i possibili comportamenti delle traiettorie?

Si tratta di capire le FORME CANONICHE della matrice.

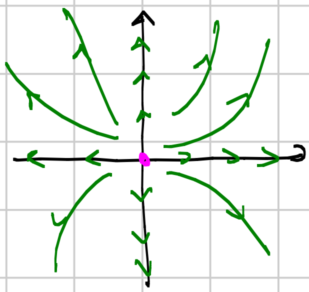
$\boxed{\text{AUTOVALORI REALI DISTINTI = matrice diagonale}}$

$\hat{u}' = \lambda_1 \hat{u}$ $\qquad$ $\hat{u}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$

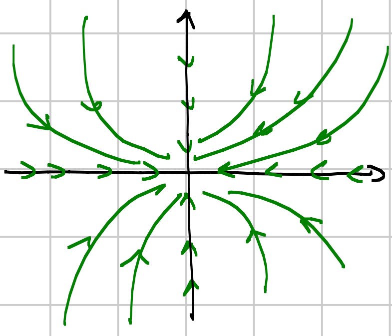
$\hat{v}' = \lambda_2 \hat{v}$ $\qquad$ $\hat{v}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$

$\boxed{\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 > 0}$ Tutte le traiettorie tendono a $(0,0)$ per $t \to -\infty$ e "scappano" per $t \to +\infty$ $\boxed{\text{INSTABILITÀ}}$

L'essere ↗ o ↖ dipende dal rapporto λ_1 / λ_2.



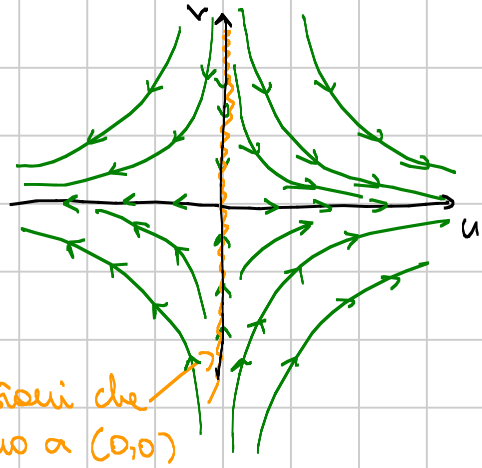
$\boxed{\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0}$ Stessa cosa invertendo i versi $\boxed{\text{STABILITÀ}}$



$\boxed{\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0}$ esempio $u = c_1 e^{3t}$

$v = c_2 e^{-t}$

Allora $v = c \frac{1}{\sqrt[3]{u}}$



soluzioni che tendono a (0,0) per $t \to +\infty$.

Se λ_1 o λ_2 sono nulli, allora le traiettorie sono rette, a meno che non siano entrambi nulli, nel qual caso le traiettorie sono punti (tutto sta fermo).
Tutto questo funziona anche se gli autovalori sono coincidenti ma la molteplicità geometrica è 2.

AUTOVALORE REALE DI MOLT. ALG. 2 e GEOM. 1 La matrice non è diagonale, ma si può sempre portare nella forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

che corrisponde ad un sistema del tipo

$$\begin{cases} \hat{u}' = \lambda \hat{u} + \hat{v} \\ \hat{v}' = \lambda \hat{v} \end{cases}$$

È disaccoppiato nella 2ª equazione, quindi risolvo la 2ª: $\hat{v}(t) = c_2 e^{\lambda t}$ e vado a sostituire nella 1ª: $\hat{u}' = \lambda \hat{u} + c_2 e^{\lambda t}$, la cui soluzione è del tipo

$$\hat{u}(t) = c_1 e^{\lambda t} + \underbrace{(\text{cost. dip. da } c_2)}_{\alpha c_2} t e^{\lambda t}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}(t) \\ \hat{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} + \alpha c_2 \, t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha t \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI $\alpha \pm i\beta$

La matrice si può portare nella forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ (fatto generale di algebra lineare) il che corrisponde ad un sistema della forma (elimino i ^)

$$\begin{cases} u' = \alpha u + \beta v \\ v' = -\beta u + \alpha v \end{cases}$$

Passo in coordinate polari, cioè scrivo $\quad u(t) = \rho(t) \cos\theta(t)$

$v(t) = \rho(t) \sin\theta(t)$

$$u'(t) = \rho'(t)\cos\theta(t) - \rho(t)\sin\theta(t)\,\theta'(t) \qquad \cdot \cos\theta(t)$$
$$v'(t) = \rho'(t)\sin\theta(t) + \rho(t)\cos\theta(t)\,\theta'(t) \qquad \cdot \sin\theta(t)$$

$$u'(t)\cos\theta(t) = \rho' \cdot \cos^2 - \rho\theta' \sin\cos$$
$$v' \sin\theta = \rho' \sin^2 + \rho\theta' \cos\sin$$

$$u'(t)\cos\theta(t) + v'(t)\sin\theta(t) = \rho'(t)$$

$$= [\alpha u(t) + \beta v(t)]\cos\theta(t) + [-\beta u(t) + \alpha v(t)]\sin\theta(t)$$
$$= [\alpha\rho\cos\theta + \beta\cancel{\rho\sin\theta}]\cos\theta + [-\cancel{\beta\rho\cos\theta} + \alpha\rho\sin\theta]\sin\theta$$

Ho ottenuto che $\quad \rho'(t) = \alpha\rho(t) \quad \Rightarrow \quad \rho(t) = c_1 e^{\alpha t}$

Esercizio: ottenere l'equazione per $\theta'(t)$ (risulta pulitissima)